MATHEMATICAL SCIENCES LIBRARY
3 1761 05553632 0

SUR LES SÉRIES DIVERGENTES
ET LES FONCTIONS DÉFINIES PAR
UN DÉVELOPPMENT DE TAYLOR

M. E. LE ROY

QA
295
L4
1900
c.1
MATH

PRESENTED

by

PROF. K.O. MAY

1974

DRG SUMMIT 8993

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES

ET LES

FONCTIONS DÉFINIES PAR UN DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR,

PAR M. ÉDOUARD LE ROY.

I. — Le problème du prolongement analytique.

1. On sait, depuis Weierstrass, quelle différence précise il convient d'établir entre les deux concepts de *fonction analytique* et d'*expression analytique*.

La théorie des fonctions, dont l'un des principaux objets est justement d'approfondir les rapports que soutiennent entre eux ces deux termes, soulève donc deux grands problèmes, inverses l'un de l'autre, mais également importants. Étant donnée d'une part une certaine classe de fonctions, on peut en chercher une représentation analytique appropriée; et l'on peut aussi d'autre part faire directement l'étude des fonctions définies par les expressions analytiques d'un type déterminé. C'est à ce second point de vue que je me suis placé, en prenant pour sujet de mes recherches le développement de Taylor.

2. Considérons une série entière

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots.$$

Trois cas peuvent se présenter, suivant que cette série est convergente dans tout le plan de la variable complexe z, qu'elle a un cercle de convergence fini ou qu'elle diverge toujours. Un théorème de Cauchy, retrouvé par M. Hadamard, permet de décider, à propos d'un exemple quelconque, par l'examen de la quantité $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$, dans lequel de ces trois cas on se trouve. Je n'envisagerai pour le moment que les séries entières possédant un cercle de convergence fini.

Je puis, sans restreindre la généralité, supposer le rayon de ce cercle égal à l'unité : en effet, une transformation élémentaire ramène un cas quelconque à

celui-là. Alors, sous la condition

$$|z| < 1,$$

notre série définit une fonction de z dont les propriétés fondamentales sont bien connues.

Mais il peut se faire que cette fonction existe pour des valeurs de z qui rendent la série divergente. Dans ce cas, on sait que la seule connaissance de la série permet encore, au moins théoriquement, de définir sans ambiguïté la fonction en tous les points de son domaine naturel d'existence. En d'autres termes, si l'on adopte la notion de fonction analytique telle que Weierstrass l'a construite, il est possible, — M. Poincaré l'a montré ([1]), — d'instituer, à partir de la série envisagée comme élément initial, une suite régulière d'opérations formant un ensemble dénombrable et permettant d'atteindre la fonction en tout point où elle est holomorphe.

Toutefois, on n'a aucun moyen général de reconnaître à la simple inspection de la série si le prolongement est possible, ni, dans le cas où il le serait, d'apercevoir sur la série même des signes indiquant l'allure de la fonction en chacun des points où elle existe. D'où il résulte que, si le développement de Taylor constitue une bonne définition *théorique* d'une fonction, il n'en constitue pas une bonne définition *pratique*. C'est cette lacune que je me suis efforcé de combler, question dont la solution complète serait d'autant plus désirable qu'aucun autre mode de représentation analytique des fonctions ne présente, au point de vue du calcul, les mêmes avantages que la série de Taylor.

En résumé, le problème que je me propose de résoudre peut s'énoncer ainsi :

Sachant qu'une série entière pourvue d'un cercle de convergence représente une fonction douée d'une individualité bien définie et qu'elle permet de calculer de proche en proche toutes les valeurs de cette fonction, trouver des caractères qui fassent lire sur la série même les propriétés de continuité de la fonction.

Il va sans dire que je n'ai pu obtenir une solution complète. La question posée, comme celle de la convergence des séries numériques, n'est pas de celles qui en comportent. Mais ce n'est pas une raison pour ne point proposer les méthodes qui, sans permettre de traiter tous les cas possibles, procurent cependant le moyen d'aborder bien des cas pratiques.

3. Partons d'un développement de Taylor arbitrairement donné et cherchons à en effectuer le prolongement analytique. M. Borel a démontré ([2]) que le cercle de

---

([1]) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. II.

([2]) *Acta mathematica*, t. XXI.

convergence d'une série entière est, *en général,* une coupure ou ligne singulière essentielle pour la fonction que cette série définit. Le prolongement est alors impossible. Il arrive donc, *en général,* que les théorèmes classiques dus à Abel suffisent pour étudier la fonction dans tout son domaine naturel d'existence. D'ailleurs cela pouvait être aisément prévu, la série de Taylor étant une expression *isotrope* pour laquelle, si l'on reste dans le cas le plus général, aucune direction du plan z ne saurait être privilégiée.

Une remarque s'impose à ce sujet. Le théorème de M. Borel est relatif aux séries *quelconques* dont les coefficients sont donnés *au hasard*. Mais la fonction la plus générale ne correspond pas à la série la plus générale. Au point de vue ordinaire de l'Analyse, la fonction la plus générale est, en effet, celle pour qui la distribution des points singuliers n'est soumise à aucune loi. Il est donc certain que, si l'on se borne aux questions naturelles d'Analyse dans lesquelles les séries de Taylor que l'on devra considérer seront *amenées* par un calcul et non posées *a priori,* les fonctions les plus fréquentes et les plus utiles seront des fonctions prolongeables.

Je crois pouvoir conclure de ce qui précède que, en essayant surtout de définir des *classes de séries prolongeables,* je ne limite pas outre mesure la portée pratique des recherches que j'entreprends. Je m'attacherai donc spécialement à découvrir des *caractères de prolongeabilité*. Il y a là une théorie à édifier, semblable, je le répète, à celle de la convergence des séries. Cette comparaison expliquera que je néglige, au besoin, la généralité des résultats devant leur netteté. J'ajoute enfin que, loin de prétendre être complet, ce Mémoire contient principalement des exemples et des applications dont le but est de montrer le mécanisme de la méthode que je propose et l'intérêt qu'elle peut offrir.

4. Pour utiliser le théorème de M. Borel, il faut connaître des cas précis que l'on puisse dire *généraux* au point de vue qui nous occupe.

En voici un exemple. Les travaux de MM. Hadamard, Borel et Fabry [1] conduisent à formuler la proposition suivante :

La série $\sum_0^\infty \alpha_n z^{a_n}$ *admet effectivement son cercle de convergence comme coupure, quels que soient les coefficients* α_n *(sous la seule réserve qu'il y ait en effet un cercle de convergence fini), pourvu que les exposants* a_n *soient des nombres entiers positifs et croissants tels que la différence* $a_{n+1} - a_n$ *augmente au delà de toute limite avec* n.

---

[1] Hadamard, *Journal de Mathématiques;* 1892. — Borel, *Ibid.;* 1896. — Fabry, *Annales de l'Ecole Normale supérieure;* 1896.

Le problème étant ainsi résolu pour les séries à *lacunes indéfiniment grandissantes*, je n'examinerai que les séries *complètes*. Mais il est bien entendu que je n'exclus pas le cas où une substitution de la forme

$$z' = z^p,$$

p désignant un entier positif, ramènerait la série étudiée à la forme complète.

5. Il résulte encore des travaux de M. Fabry que, si l'on pose

$$\alpha_n = \rho_n e^{i\theta_n},$$

ρ_n et θ_n étant réels, pourvu que $\rho_n^{\frac{1}{n}}$ tende vers 1 quand n augmente indéfiniment, on peut toujours choisir θ_n de façon que le cercle de rayon 1 soit coupure effective pour la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$.

Donc, même en se bornant aux séries complètes, il ne faut pas chercher des critères *généraux* permettant d'affirmer que le prolongement est possible : la question posée ne peut recevoir que des réponses *particulières* dont il y a lieu d'assurer le caractère pratique plus que l'étendue.

Je dis même que le cercle de convergence de la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *est une coupure effective pour la fonction que cette série définit, si* α_n *est une fonction périodique de* n *développable en série trigonométrique absolument convergente.*

Soit, en effet,

$$\alpha_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_p e^{ipn},$$

la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_p|$ étant convergente. On a évidemment

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_p}{1 - z e^{ip}}.$$

La fonction $f(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1, admet tous les points e^{ip} de ce cercle comme pôles simples. D'après une proposition due à M. Goursat et reprise par M. Borel dans sa Thèse, ces points sont effectivement singuliers pour $f(z)$. Or la théorie des fractions continues nous apprend qu'ils forment un ensemble *dense sur tout le cercle*. D'où la conclusion. Il importe

d'ailleurs de remarquer que la fonction $f(z)$ appartient à la catégorie de celles pour lesquelles M. Borel a montré que l'on pouvait généraliser la notion de prolongement.

Ce théorème permet de construire des séries très simples qui ont leur cercle de convergence comme coupure. Il suffit, par exemple, de prendre

$$\alpha_n = e^{\cos n}.$$

On déduit de là sans peine des séries $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ présentant le même caractère et pour lesquelles :

1° α_n est positif et va en décroissant quand n augmente;

2° La série $\sum_0^\infty \alpha_n$ converge;

3° Le rapport $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ tend vers 1 pour n infini.

Il est visible que l'on peut trouver ainsi des séries de même nature dont les coefficients satisfont isolément à telles inégalités restrictives que l'on veut. *Ce n'est pas l'ordre de grandeur de α_n pour n infini qui intervient pour la possibilité du prolongement, mais bien la nature analytique pour n infini de α_n regardé comme une fonction de son indice.* Tel est le principe que je veux établir.

Le théorème énoncé plus haut comporte deux cas d'exception que je dois signaler :

1° *Si α_n s'exprime par une suite de Fourier limitée, $f(z)$ est une somme d'un nombre fini de fractions simples et n'a donc dans tout le plan qu'un nombre fini de pôles simples distribués sur le cercle de rayon* 1;

2° *Si α_n est une fonction périodique de n à période commensurable, la suite des points singuliers est elle même périodique et $f(z)$ n'a qu'un nombre fini de pôles simples distribués sur le cercle de convergence aux sommets d'un polygone régulier inscrit.*

6. La question que je me suis posée dans ce Mémoire a déjà donné lieu à bien des travaux qu'il serait trop long d'énumérer. Mais je me place à un point de vue très différent. Jusqu'ici, on partait généralement d'une série arbitraire et l'on cherchait un moyen d'en découvrir les points singuliers : c'est ce qui explique qu'on ait surtout trouvé des résultats relatifs au cas où le prolongement est impossible. Je veux, au contraire, développer quelques hypothèses simples portant, soit sur la forme analytique explicite de α_n, soit sur la manière dont ce coefficient est donné par un calcul antérieur.

MM. Leau et Fabry [1] ont obtenu plusieurs des résultats que je donne ici. Mais je crois que la méthode que je propose présente plusieurs avantages. D'abord elle est très simple, puis elle permet d'étudier une fonction dans tout le plan et non pas seulement aux environs du cercle de convergence. Issue de cette idée que toutes les propriétés d'une fonction sont pour ainsi dire condensées dans la structure de son développement taylorien, elle fournit, lorsqu'elle s'applique, non seulement les affixes des points singuliers, mais leur nature, les périodes qui s'y rapportent et les valeurs de la fonction en tous les autres points. Enfin, conduisant à extraire de la série de Taylor une expression analytique équivalente valable pour tout le plan, elle se prête à de nombreuses applications dont je signalerai les principales.

Un résumé de ce Mémoire a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 20 février 1899.

II. — Calcul numérique d'une fonction en dehors du cercle de convergence.

7. Le premier problème qui se présente est celui-ci :

Étant donnée une fonction par son développement taylorien, calculer ses valeurs en tout point où elle est régulière.

La série primitive et celles qu'on en peut déduire par la méthode du prolongement fournissent une première solution, malheureusement très compliquée.

M. Borel [2], par ses recherches sur la sommation des séries divergentes, a ouvert une voie nouvelle où M. Servant [3], après lui, a obtenu d'importants résultats.

M. Lindelöf [4] a indiqué un procédé tout à fait général, fondé sur l'emploi de représentations conformes.

Enfin, tout récemment, M. Mittag-Leffler [5] a montré que l'on pouvait toujours construire, à partir de la série entière donnée, une série de polynomes qui converge en tout point où la fonction est holomorphe, sauf des coupures rectilignes allant de chacun des points singuliers à l'infini.

---

(1) Fabry, *Journal de Mathématiques;* 1898. — Leau, *Ibid.;* 1899. — Le présent Mémoire, daté du 23 février 1899, était rédigé avant la publication du Mémoire de M. Leau. Des circonstances indépendantes de ma volonté en ont retardé l'impression : j'en ai profité pour y ajouter le paragraphe II, ainsi que plusieurs indications bibliographiques.

(2) *Journal de Mathématiques;* 1896, et *Annales de l'École Normale;* 1899.

(3) *Thèse de Doctorat;* 1899.

(4) *Acta Societatis fennicæ;* 1898.

(5) *Comptes rendus;* 15 mai 1899.

Mais, dans une pareille question, on ne saurait trop multiplier les méthodes que le calculateur aura à sa disposition. Je vais donc indiquer un procédé nouveau, qui permet d'ailleurs de retrouver très simplement le théorème de M. Mittag-Leffler [1].

8. Considérons d'abord la progression géométrique

$$\sum_0^\infty z^n. \tag{1}$$

Soit t un paramètre réel compris entre 0 et 1. Je pose

$$G(z, t) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n, \tag{2}$$

Γ désignant la fonction eulérienne de seconde espèce. La formule bien connue qui donne la valeur asymptotique de Γ montre immédiatement que G est une fonction entière de z, tant que t reste inférieur à 1.

On peut écrire

$$G(z, t) = \int_0^\infty e^{-x+zx^t} dx,$$

et cette intégrale est convergente pour $t < 1$, quel que soit z.

Le chemin d'intégration coïncide d'abord avec la partie positive de l'axe réel du plan. Mais il est visible qu'on peut lui substituer un autre chemin rectiligne L allant de l'origine à l'infini et faisant avec le premier un angle φ moindre que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. Cela tient à ce que l'intégrale G, prise le long d'un arc de cercle C compris entre les deux chemins précédents, tend vers zéro quand le rayon de C croît au delà de toute limite.

Imaginons maintenant que t tende vers 1. Alors le développement (2) tend *formellement* vers le développement (1). Mais qu'arrive-t-il pour G?

Considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x+zx} dx$$

prise le long du chemin rectiligne L. Elle est convergente et a pour valeur $\frac{1}{1-z}$ tant que le point z est dans un certain domaine T. La convergence est même

[1] On verra facilement le lien de cette méthode avec celle de M. Borel.

absolue et *uniforme* dans tout domaine intérieur à T. Or, quel est ce domaine T? Posons

$$x = \rho e^{i\varphi}, \qquad z = \alpha + i\beta.$$

Le domaine T est formé de toute la région du plan située du même côté que l'origine par rapport à la droite dont l'équation est

$$\alpha \cos\varphi - \beta \sin\varphi = \cos\varphi.$$

Cette dernière droite, frontière unique de T, n'est autre que la droite menée par le point $z = 1$ parallèlement à la symétrique de L par rapport à la bissectrice $\alpha = \beta$. Nous supposerons désormais que z reste dans T. D'ailleurs, en faisant varier φ dans les limites permises, T balaie le plan tout entier, sauf une coupure rectiligne allant de $z = 1$ à $z = \infty$ le long de l'axe réel.

Quoi qu'il en soit, supposons L et T fixés. Si z est dans T, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x+zx^t} dx$$

prise le long de L est absolument et uniformément convergente pour $t \leqq 1$. On conclut de là que $G(z, t)$ tend vers $\frac{1}{1-z}$ quand t tend vers 1; G tend même uniformément vers sa limite, pourvu que z n'atteigne pas la frontière de T.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, tout à fait fondamental dans la question qui nous occupe :

Soit T *un domaine fini quelconque dont la frontière reste à distance finie d'une coupure allant du point $z = 1$ au point $z = \infty$ le long de l'axe réel : l'expression*

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n,$$

où t désigne un paramètre réel inférieur à 1, *tend uniformément vers*

$$\frac{1}{1-z},$$

quand t tend vers 1, *pourvu que z reste dans* T.

9. Soit maintenant

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

une fonction holomorphe à l'origine. Traçons des coupures rectilignes allant de

chacun des points singuliers de $f(z)$ à l'infini le long des rayons vecteurs de ces points singuliers. Je désignerai par T un domaine fini quelconque dont la frontière reste à distance finie des coupures précédentes et je supposerai que z ne sort pas de T. Appelons d'ailleurs C un contour fermé contenant T à son intérieur et ne rencontrant aucune des coupures envisagées.

On a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{z-u}\,du.$$

Posons

$$G(z, t) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} x_n z^n,$$

t désignant comme ci-dessus un paramètre réel compris entre 0 et 1. La fonction entière G peut se mettre sous la forme

$$G(z, t) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{u}\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{z^n}{u^n}\,du,$$

car

$$x_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(u)}{u^{n+1}}\,du.$$

Or on peut toujours supposer C choisi de telle façon que, z restant dans T, $\frac{z}{u}$ reste (quand u décrit C) dans un domaine T′ auquel est applicable le théorème du paragraphe précédent. Alors

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\frac{z^n}{u^n}$$

tend uniformément vers

$$\frac{u}{u-z},$$

et, par suite, G tend uniformément vers $f(z)$, le tout quand t tend vers 1.

Nous obtenons donc finalement le théorème que voici :

Étant donnée une fonction holomorphe autour de l'origine

$$f(z) = \sum_0^\infty x_n z^n,$$

et un domaine T *défini comme il a été dit, l'expression*

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} x_n z^n$$

tend uniformément vers $f(z)$ quand t tend vers 1 par valeurs réelles et plus petites que 1, pourvu que z reste dans T.

10. La méthode précédente donne immédiatement l'extension d'une série de Taylor à tout le plan.

Elle constitue, si l'on veut, un procédé général pour rechercher les points singuliers d'une fonction définie par son développement taylorien.

Mais je l'envisagerai surtout comme fournissant un moyen de calculer numériquement cette fonction.

A ce dernier point de vue, elle permet de retrouver bien aisément le théorème de M. Mittag-Leffler. Soit, en effet, ε un nombre positif donné aussi petit que l'on veut. Choisissons $t = t_0$ de telle manière que l'on ait

$$|G(z, t_0) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit z dans T. Cela fait, on peut limiter la série convergente $G(z, t_0)$ de façon qu'en désignant par $P(z)$ la somme de ses n premiers termes, on ait

$$|G(z, t_0) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que n surpasse une certaine limite assignable. Il vient alors

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon.$$

Ainsi la fonction $f(z)$ peut être représentée par un polynome avec telle approximation que l'on veut dans tout le domaine T.

Soient enfin

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

des nombres positifs tels que la série

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n$$

soit convergente. Déterminons, par la méthode précédente, les polynomes P_n tels que

$$|f(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n$$

dans T. On a évidemment

$$f(z) = P_0 + (P_1 - P_0) + (P_2 - P_1) + \ldots$$

et la série du second membre est absolument et uniformément convergente dans T. *C'est le théorème de M. Mittag-Leffler.*

Mais, sans insister davantage, je vais présenter quelques remarques générales.

11. Considérons une série quelconque

$$\sum_0^\infty \alpha_n \tag{1}$$

convergente ou divergente. Nous dirons avec Cauchy qu'elle est *de module fini,* si la série entière associée

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n \tag{2}$$

possède un cercle de convergence limité. Dans ce cas, la série auxiliaire

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \alpha_n \qquad (0 < t < 1) \tag{3}$$

est convergente.

Si la somme de la série (3) tend vers une limite L quand t tend vers 1, nous conviendrons de dire que la série (1) est *sommable* et a pour somme L.

Il est clair qu'une série convergente est toujours sommable et a la même somme aux deux points de vue de la convergence et de la sommabilité : la notion de sommabilité fournit donc une généralisation *légitime* de la notion de convergence.

Cette généralisation est *effective,* comme le montrent les théorèmes établis ci-dessus.

Si la série (1) est divergente et a ses termes tous positifs, la série (3) augmente indéfiniment à mesure que t se rapproche de 1. Il faut donc, dans le cas de la divergence, que la série (1) soit *oscillante* pour que la considération de la série (3) permette de lui attribuer une *vraie valeur.*

Lorsque les α_n dépendent d'une variable u, nous dirons que la série (1) est *uniformément sommable* dans un domaine T si la série (3) tend uniformément vers une limite quand t tend vers 1, u restant dans T.

Il résulte des théorèmes établis dans ce Chapitre que toute série entière de module fini est sommable dans le domaine naturel d'existence de la fonction $f(z)$ qu'elle définit autour de l'origine.

Une telle série peut être maniée dans le calcul, soit au point de vue de la multiplication, soit au point de vue de l'intégration ou de la dérivation terme à terme, comme si elle était convergente.

On voit, en fin de compte, que les considérations développées dans ce Chapitre

donnent une solution complète du *problème des séries divergentes de module fini*.

La valeur numérique d'une telle série peut être calculée ainsi par un procédé qui ne dépend que de la valeur numérique des termes de la série donnée.

J'ai à peine besoin d'ajouter qu'une série uniformément sommable de fonctions continues est une fonction continue, qu'une série uniformément sommable de fonctions holomorphes est une fonction holomorphe, qu'on peut intégrer ou dériver terme à terme une série uniformément sommable dans les mêmes conditions (*mutatis mutandis*) qu'une série uniformément convergente, etc.

On pourrait essayer d'étendre la méthode que je viens d'esquisser au cas des séries entières dont le rayon de convergence est nul. C'est un point sur lequel je me réserve de revenir. Mais ici je m'attacherai surtout à une autre méthode, à l'étude de laquelle je me bornerai désormais.

III. — Principes de la méthode employée.

12. Voici la marche qu'il est le plus naturel de suivre pour effectuer le prolongement analytique d'une série de Taylor : *déduire de la série donnée une autre expression qui converge dans la plus grande étendue possible du plan et qui prenne les mêmes valeurs que la série primitive autour de l'origine*. La légitimité de cette méthode est fondée sur le théorème suivant, qui est bien connu : *Deux fonctions, holomorphes dans un domaine d'un seul tenant, coïncident en tout point de ce domaine si elles coïncident dans une petite aire intérieure*.

C'est cette marche que l'on suit dans les cas tout à fait élémentaires où l'on peut sommer la série, par exemple dans le cas des séries récurrentes. C'est encore cette marche qu'ont suivie M. Lindelöf (1) en utilisant des représentations conformes et M. Borel (2) en introduisant la notion de série divergente sommable. Mais, dans une question de ce genre, il est avantageux de multiplier les méthodes que le calculateur aura à sa disposition. C'est pourquoi je proposerai un autre procédé, basé sur l'emploi de certaines intégrales définies.

Ce procédé n'est pas absolument inédit. M. Hadamard (3) signale rapidement dans sa Thèse l'une des propositions fondamentales dont j'aurai à faire usage. M. Pincherle (4) a consacré quelques pages au même sujet. Mais je me placerai à un point de vue exactement inverse de celui qu'adopte M. Hadamard et je devrai d'autre part m'éloigner beaucoup de M. Pincherle dans les développements que je donnerai à quelques-uns de ses théorèmes.

---

(1) *Acta Societatis fennicæ*; 1898.

(2) *Journal de Mathématiques*; 1896, et *Annales de l'École Normale supérieure*; 1899.

(3) *Journal de Mathématiques*; 1892.

(4) *Acta mathematica*; 1887.

13. Considérons tout d'abord l'intégrale

$$J(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx} dx,$$

et cherchons-en les propriétés principales.

Nous supposerons l'intégration effectuée le long du segment (0, 1) de l'axe réel OX.

Quant à la fonction φ, nous ne ferons pas sur elle d'autre hypothèse que celle-ci : *l'intégrale*

$$\int_0^1 |\varphi(x)| dx$$

a un sens.

Cela posé, l'intégrale $J(z)$ a une valeur finie et déterminée en tout point z qui n'est pas situé sur la partie $(+1, +\infty)$ de OX. Il y a plus : *je dis que* $J(z)$ *est holomorphe dans le même domaine.* En effet, choisissons au hasard un point z_0 dont l'affixe ne soit pas réelle et supérieure ou égale à 1. On voit immédiatement que l'on peut écrire

$$J(z) = \sum_0^\infty \alpha_n (z - z_0)^n,$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) \frac{x^n}{(1 - z_0 x)^{n+1}} dx.$$

La convergence a lieu dans un certain cercle décrit de z_0 comme centre et le théorème annoncé est donc vrai. *La fonction* $J(z)$ *est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour* z *réel et plus grand que* 1.

Posons maintenant

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx.$$

On a, au voisinage de l'origine,

$$J(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n. \tag{1}$$

Le rayon de convergence de cette série est égal au moins à 1. *L'intégrale* $J(z)$ *coïncide, à l'intérieur du cercle de convergence, avec la somme de la série* (1) *et, par suite, définit l'extension analytique à tout le plan de la fonction représentée par celle-ci.*

Les points singuliers de $J(z)$ ne peuvent être situés que sur la portion $(+1, +\infty)$ de OX. En particulier, si le cercle de convergence de la série (1) a l'unité pour rayon, il ne contient qu'un point singulier de $J(z)$: $z = 1$.

La portion $(+1, +\infty)$ de OX est pour $J(z)$ une *coupure*. Cette coupure est essentielle si la fonction φ n'est pas analytique pour $0 < x < 1$. Mais supposons $\varphi(x)$ holomorphe dans une aire contenant ce segment à son intérieur. Alors l'intégration peut être effectuée le long d'un chemin curviligne allant du point 0 au point 1 : *d'où l'on conclut que la coupure n'est pas essentielle et que* $J(z)$ *n'a pas d'autres points singuliers que* $z = 1$ *et* $z = \infty$.

Plus généralement, si $\varphi(x)$ est holomorphe autour du point λ (λ réel et compris entre 0 et 1), $J(z)$ est holomorphe autour du point $\frac{1}{\lambda}$. *Si donc* $\varphi(x)$ *est généralement holomorphe au voisinage du segment* $(0, +1)$ *de* OX, *sauf en des points isolés,* $J(z)$ *n'a que des points singuliers isolés, distribués sur la partie* $(+1, +\infty)$ *du même axe.*

Dans ce cas simple, $J(z)$ *n'est pas uniforme et le calcul du saut brusque subi par l'intégrale quand on franchit la coupure donne les diverses déterminations de* $J(z)$. Il suffit, pour le voir, de se reporter aux travaux bien connus de M. Hermite sur les intégrales à coupures et d'appliquer le théorème des résidus. Plusieurs circonstances peuvent se présenter : Si $\varphi(x)$ est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être à l'origine, on peut faire passer la coupure par tel point que l'on veut et les périodes de $J(z)$, quand on tourne autour du point 1, sont données par l'expression

$$2k\pi i \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dans le cas général (la coupure n'étant cependant pas essentielle), la même formule est valable pour les points voisins de OX et peut ensuite être étendue par prolongement à tout le plan, *mais toutes les singularités sont alors possibles, suivant la nature analytique de la fonction* φ, *pour les déterminations de* $J(z)$ *autres que la détermination principale.*

Ces résultats sont bien simples et l'on voit que la considération de $J(z)$ permet de résoudre complètement le problème de l'extension analytique de la série (1).

On peut bien souvent aller plus loin. Je ne citerai que quelques exemples. Si la fonction $\varphi(x)$ est positive et si l'on pose

$$z = u + iv,$$

il vient

$$J(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{1 - ux}{(1 - ux)^2 + v^2 x^2} dx + iv \int_0^1 \varphi(x) \frac{x}{(1 - ux)^2 + v^2 x^2} dx.$$

Si v n'est pas nul, il est impossible d'annuler le coefficient de i dans l'expression de $J(z)$: l'équation $J(z) = 0$ n'a donc pas de racines imaginaires. Si $v = 0$, la partie réelle de $J(z)$ ne peut pas être nulle pour $u < 1$: l'équation $J(z) = 0$

n'a donc pas de racines réelles inférieures à 1. *En résumé, l'équation* $J(z) = 0$ *ne peut avoir que des racines réelles supérieures à* 1. Cette remarque, utilisée par M. Desaint [1] dans sa Thèse, ne s'applique évidemment qu'à la branche principale de $J(z)$.

Je montrerai plus loin sur des exemples que l'on peut tirer parti de l'expression de $J(z)$ pour trouver l'allure de cette fonction à l'approche de ses points singuliers. Qu'il me suffise de faire remarquer actuellement que la détermination principale reste finie quand z grandit indéfiniment avec un argument différent de zéro.

14. Considérons maintenant une série entière

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

dont nous supposerons le rayon de convergence égal à l'unité. Soit $f(z)$ la fonction définie par cette série. Si nous parvenons à construire une fonction $\varphi(x)$ telle que l'on ait

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n, nous poserons

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx}\, dx,$$

et nous aurons effectué le prolongement analytique de la série. Ce procédé nous fournit le moyen, non seulement d'étudier la nature analytique de $f(z)$, mais encore d'en calculer numériquement la valeur en tout point du plan qui n'est pas singulier.

Sans doute, la méthode précédente ne peut rien donner de plus que la méthode classique du prolongement analytique à l'aide de cercles de convergence successifs. Mais elle est beaucoup plus pratique et permet en outre, *par un ensemble régulier d'opérations,* d'atteindre la fonction étudiée dans tout son domaine d'existence, y compris le voisinage des points singuliers, et non pas seulement (comme le procédé de M. Poincaré) dans tout domaine intérieur au domaine naturel d'existence. Le seul inconvénient de la méthode est de n'être pas générale : pour savoir si elle est applicable, il faut résoudre un problème d'in-

---

[1] E. Desaint, *Sur quelques points de la théorie des fonctions* (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1897).

version d'intégrale définie consistant à construire une fonction φ telle que

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

pour n entier et positif.

15. On aperçoit immédiatement la possibilité de généralisations étendues. J'y insisterai peu, les démonstrations étant les mêmes, *mutatis mutandis,* au moins en ce qui concerne les points importants.

Rien n'empêche, par exemple, de faire correspondre à une série de Taylor donnée une intégrale de la forme

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, G\left(\frac{1}{1 - zx}\right) dx,$$

$G(t)$ désignant une fonction entière de t, ou même plus généralement encore une intégrale telle que

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, F(zx)\, dx$$

où $F(t)$ représente une fonction analytique de t holomorphe à l'origine dont les singularités sont supposées connues dans tout le plan.

Bornons-nous, pour simplifier, au cas où $F(t)$ n'a que des points singuliers isolés : soient

$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_p, \quad \ldots$$

les affixes de ces points.

Si $F(t)$ n'est pas uniforme, nous commencerons par pratiquer dans le plan (z) des coupures rectilignes allant de chacun des points t_p à l'infini et dont les prolongements passent par l'origine : la fonction F est ainsi rendue uniforme.

Dans tous les cas, ces coupures seront celles de l'intégrale $f(z)$. Celle-ci est holomorphe en tout point non situé sur les coupures, au moins tant que l'on se contente de considérer les valeurs de $f(z)$ susceptibles d'être atteintes quand la variable z suit un chemin issu de l'origine et ne rencontrant pas les coupures. Il est clair que, dans le plan ainsi coupé, $f(z)$ est uniforme.

Si $\varphi(x)$ n'est pas analytique, les coupures sont essentielles et il n'y a rien à dire de plus, à moins que l'on n'abandonne le concept de fonction analytique tel que l'a constitué Weierstrass et que l'on ne cherche à généraliser l'idée de prolongement. Mais, si $\varphi(x)$ est analytique, on sait que les coupures ne sont plus qu'apparentes. Dans ce cas, $f(z)$ n'est plus uniforme et il y a lieu d'en poursuivre l'étude.

Supposons donc que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique admettant des points singuliers isolés :

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_p, \quad \ldots$$

Traçons, dans le plan (x), des coupures rectilignes allant de chacun des points x_p à l'infini et dont les prolongements passent par o : $\varphi(x)$ est ainsi rendue uniforme.

Soit ξ un point situé sur le segment (o, 1) de l'axe réel du plan (x) : choisissons-le de façon que $\varphi(x)$ soit holomorphe en son voisinage. Considérons maintenant le point $\frac{t_p}{\xi}$ du plan (z) et donnons à z une valeur voisine de $\frac{t_p}{\xi}$. En vertu du théorème fondamental de Cauchy sur l'intégration des fonctions holomorphes, nous pouvons effectuer l'intégration qui donne $f(z)$ le long d'un chemin curviligne ainsi construit : ce chemin coïncide avec le segment rectiligne $(x = 0, x = 1)$, sauf aux environs de ξ où il affecte la forme d'une demi-circonférence. Cette demi-circonférence doit être prise assez petite pour ne contenir à son intérieur aucun point x_p, ce qui est évidemment possible. En outre, cette même demi-circonférence sera d'un côté ou de l'autre de l'axe réel du plan (x) suivant que z sera d'un côté ou de l'autre de la coupure (t_p) du plan (z). Les diverses coupures du plan (z) sont d'ailleurs très peu modifiées par suite du changement de contour d'intégration. En particulier, la coupure (t_p) reste la même, sauf aux environs du point $\frac{t_p}{\xi}$ où elle devient une petite courbe. On suppose la demi-circonférence du plan (x) choisie de telle façon que le point z et la petite courbe dont je viens de parler soient de part et d'autre de la coupure (t_p). *Dans ces conditions, on voit immédiatement que $f(z)$ est holomorphe, même au voisinage du point $\frac{t_p}{\xi}$.* Il ne s'agit ici que des valeurs de $f(z)$ susceptibles d'être atteintes quand l'on fait suivre à z un chemin partant de o et aboutissant à $\frac{t_p}{\xi}$ d'un certain côté de la coupure (t_p); on aurait le même résultat si le chemin que décrit z aboutissait à $\frac{t_p}{\xi}$ de l'autre côté; mais les deux valeurs obtenues pour $f(z)$ ne seraient pas forcément égales. *On voit donc qu'en général, si les coupures (t_p) ne sont pas essentielles, $f(z)$ n'est plus uniforme.*

Imaginons que z parcoure un chemin fermé partant de z_0 $\left(\text{voisin de } \frac{t_p}{\xi}\right)$ et y revenant après avoir franchi m_p fois la coupure (t_p) dans le même sens, sans en franchir aucune autre. Les considérations précédentes permettent de calculer aisément la quantité dont s'est accrue $f(z_0)$ [1] : il suffit d'appliquer les méthodes de M. Hermite sur les intégrales à coupures. Désignons par R_p le résidu $F(t)$ au point t_p. En supposant que ce point soit un pôle simple de $F(t)$, la quantité en question est

$$(1) \qquad 2 m_p \pi i R_p \frac{1}{z_0} \varphi\left(\frac{t_p}{z_0}\right).$$

[1] $f(z_0)$ désigne ici la valeur en z_0 de la branche principale de $f(z)$.

Dans les conditions indiquées, $f(z)$ a donc, dans le domaine du point $\frac{t_p}{\xi}$, une infinité de déterminations se déduisant de la détermination principale par addition de la quantité précédente où l'on donne successivement à m_p toutes les valeurs positives ou négatives.

Plus généralement, supposons que

$$F(t) = \frac{1}{(t - t_p)^\alpha},$$

α désignant un certain entier positif. La quantité dont s'accroît $f(z_0)$ est le produit de $2m_p\pi i$ par le résidu de $\varphi(x)F(z_0 x)$ pour $x = \xi_0$, ξ_0 étant donné par la formule

$$z_0\xi_0 = t_p.$$

Or, dans le voisinage de ξ_0 (qui est lui-même très voisin de ξ), $\varphi(x)$ est holomorphe et l'on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{h!}\frac{d^h\varphi(\xi_0)}{dx^h}(x - \xi_0)^h.$$

D'autre part

$$F(z_0 x) = \frac{1}{t_p^\alpha}\frac{1}{\left(\frac{x}{\xi_0} - 1\right)^\alpha} = \frac{1}{z_0^\alpha}\frac{1}{(x - \xi_0)^\alpha}.$$

Le résidu considéré est donc

$$2m_p\pi i\frac{1}{(\alpha - 1)!}\frac{d^{\alpha-1}\varphi\left(\frac{t_p}{z_0}\right)}{dx^{\alpha-1}}\frac{1}{z_0^\alpha}.$$

C'est une généralisation évidente de la formule établie plus haut pour le cas où t_p est pôle simple de $F(t)$.

Si t_p est un point singulier quelconque (pôle d'ordre général ou point essentiel) de la fonction *uniforme* $F(t)$, on a par la formule de Laurent

$$F(t) = \sum_0^\infty A_\alpha(t - t_p)^\alpha + \sum_0^\infty B_\beta\frac{1}{(t - t_p)^{\beta+1}};$$

et il vient

$$2m_p\pi i\sum_1^\infty \frac{B_{\beta-1}}{(\beta - 1)!}\frac{1}{z_0^\beta}\frac{d^{\beta-1}\varphi\left(\frac{t_p}{z_0}\right)}{dx^{\beta-1}}$$

pour expression de la quantité dont s'accroît $f(z_0)$.

Dans le cas, tout à fait général, où $F(t)$ n'est plus uniforme et où t_p est un point d'espèce quelconque de cette fonction, il faut calculer directement le résidu de

$\varphi(x)\,F(z_0 x)$ pour $x = \xi_0$. Nous nous bornerons, pour énoncer nos conclusions, à considérer la formule simple relative au cas où t_p est pôle simple. On verra d'ailleurs que ces conclusions sont néanmoins générales.

Notre formule (1), établie pour le voisinage du point $\frac{t_p}{\xi}$, peut être étendue à tout le plan par prolongement analytique. Mais on ne considère toujours pour z que des chemins ne rencontrant que la seule coupure (t_p).

La dernière restriction est inutile. Les mêmes raisonnements montrent que, si z est regardé comme pouvant décrire un chemin quelconque, $f(z)$ a une infinité de déterminations qui se déduisent de la détermination principale par addition du terme

$$2\pi i \sum m_p R_p \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{t_p}{z}\right)$$

où m_p et R_p ont la même signification que tout à l'heure et où le signe $\sum$ s'étend à l'ensemble des coupures traversées.

Une importante conclusion découle de là : *$f(z)$ est holomorphe en tout point, sauf aux points t_p et aux points $\frac{t_p}{x_p}$. Mais ces derniers points ne sont singuliers que pour les branches de $f(z)$ autres que la branche principale. Il en est de même du point* 0. *Quant au point* ∞, *c'est en général un point singulier pour toutes les branches.*

Il est manifeste que ce théorème s'étend au cas où la distribution des points x_p est absolument quelconque. Mais alors les branches de $f(z)$ autres que la branche principale peuvent avoir des singularités non isolées, par exemple des coupures essentielles ou des espaces lacunaires. Ainsi soit

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty a^n x^{a^2} \qquad (0 < a < 1).$$

Toutes les branches de $f(z)$, sauf la branche principale, sont holomorphes à l'extérieur du cercle de rayon 1 et admettent la circonférence de ce cercle comme coupure.

Il est, enfin, bien entendu que, s'il y avait des points x_p dont les affixes fussent réelles et comprises entre 0 et 1, on devrait d'abord supposer ces points tels que l'intégrale

$$\int_0^1 |\varphi(x)|\,dx$$

ait un sens. Il faudrait ensuite avoir rendu $\varphi(x)$ uniforme par des conventions appropriées. Cela fait, on trouverait comme points singuliers de *toutes* les

branches de $f(z)$, outre les points t_p, ceux des points $\frac{t_p}{x_p}$ qui correspondent à des x_p situés sur le segment $(0, 1)$ du plan (x).

16. Pour finir, voyons sur un exemple simple comment on déterminerait le degré de généralité des représentations précédentes.

Soit $f(z)$ une fonction analytique n'ayant à distance finie que le point singulier $z = 1$. Supposons qu'un circuit autour de ce point change $f(z)$ en $f(z) + f_1(z)$. Je pose

$$2\pi i \frac{1}{z} \varphi\left(\frac{1}{z}\right) = f_1(z).$$

D'où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x} f_1\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x} f_1\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

a un sens, je considère la fonction

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx} dx.$$

Il est clair que la différence

$$f(z) - \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - zx} dx$$

est une fonction *uniforme* n'ayant à distance finie que le point singulier $z = 1$.

On voit la conclusion qui découle de là : il y aurait lieu de chercher à la généraliser.

17. Le cas le plus complexe que j'envisagerai dans ce Mémoire sera celui de l'intégrale

$$\int_C \varphi(x) A(x, z) dx,$$

C désignant un chemin de longueur finie ouvert ou fermé, et A une fonction analytique de z holomorphe autour du point $z = 0$.

On obtiendrait sans peine, dans ce cas général, des théorèmes analogues à ceux que nous venons de rencontrer à propos d'intégrales plus simples : je n'y insisterai pas.

Les coupures sont ici les lieux géométriques engendrés par les points singuliers de A envisagé comme fonction de z lorsque le point x parcourt la ligne C : lieux qui peuvent être des points, des courbes ou même des aires.

Enfin il m'arrivera aussi d'avoir à considérer des intégrales dont les limites seront infinies. La discussion de ces intégrales, envisagées comme définissant des fonctions de z, se fera toujours très facilement par les procédés classiques.

Il est clair, en vertu de la proposition fondamentale de la théorie du prolongement, que, si l'on met une même série sous plusieurs des formes décrites plus haut, les diverses définitions que l'on obtient pour la fonction étudiée sont équivalentes : seule peut varier la région du plan où le prolongement se trouve effectué.

Il resterait à voir quel degré précis de généralité présente la méthode dont je viens d'exposer les principes. On examinerait pour cela les propriétés caractéristiques des fonctions représentées par les divers types d'intégrales que j'ai signalés. J'ai donné plus haut un exemple d'un pareil examen. Mais la discussion générale ne saurait trouver place ici.

18. Un mot de conclusion. La méthode que je propose est basée sur l'emploi de certaines intégrales définies dépendant d'une variable z. Dans tous les cas, le problème du prolongement analytique est ramené au choix d'une forme simple convenable pour le facteur du coefficient différentiel qui contient z, car c'est ce facteur qui détermine les propriétés de continuité de l'intégrale, et à la mise des coefficients de la série donnée sous la forme de certaines intégrales définies, car c'est cela qui permet d'identifier la série en question avec une intégrale du type choisi. Le présent Mémoire est consacré à la résolution de ce double problème dans les cas les plus usuels.

On voit combien est vaste le champ des applications qui se présentent et, si j'ose dire, combien la méthode proposée semble élastique. Une longue et patiente observation des faits analytiques naturels peut seule nous apprendre quels sont les types d'intégrales qu'il est le plus avantageux de considérer. Il faudrait avoir établi beaucoup de formules relatives au calcul inverse des intégrales définies pour être en mesure de tirer plein parti de notre procédé de prolongement, comme il a fallu réaliser beaucoup de quadratures avant de pouvoir manier facilement les intégrales définies ordinaires. On comprendra donc que je me borne, dans une première étude, à des généralités et à des exemples.

IV. — Quelques cas simples où le coefficient général z_n est une fonction analytique de n.

19. Si nous envisageons une série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n$$

convergente dans le cercle de rayon 1, les circonstances les plus simples sont celles où l'on connaît l'expression explicite de α_n en fonction de n. Ce cas se rencontre d'ailleurs fréquemment dans les applications, et nous allons tout d'abord l'étudier.

Loin de prétendre épuiser la question, je veux surtout indiquer des méthodes précises et les illustrer de quelques exemples bien nets.

20. Je traiterai d'abord un cas particulier qui fera comprendre la marche que je compte suivre en général.

Soit la série

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^p},$$

où p désigne un nombre quelconque dont la partie réelle est positive. On a, d'après la théorie des intégrales eulériennes,

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} x^{n-1}\,dx;$$

d'où

$$\varphi(z) = \frac{z}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{dx}{1-zx}.$$

Cette nouvelle expression représente la fonction $\varphi(z)$ dans tout le plan et met en pleine lumière ses diverses propriétés. Voici ce qu'on en déduit à simple inspection, conformément aux principes exposés plus haut [1].

La fonction $\varphi(z)$ est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1. La partie $(1, +\infty)$ de l'axe réel OX est, en apparence, une coupure pour $\varphi(z)$. Mais, $\mathrm{L}\frac{1}{x}$ étant holomorphe, cette coupure n'est pas essentielle, et les seuls points singuliers effectifs sont $z = 1$ et $z = \infty$.

On peut calculer numériquement $\varphi(z)$ et ses dérivées successives à l'aide de la formule précédente, et cela sans intermédiaires, pour un point quelconque du plan. Il vient, par exemple,

$$\frac{\varphi^{(n)}(z)}{n!} = \frac{z}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{x^n}{(1-zx)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1} \frac{x^{n-1}}{(1-zx)^n}\,dx,$$

ce qui fournit le moyen de construire immédiatement les séries auxquelles conduit la méthode ordinaire de prolongement.

La fonction $\varphi(z)$ n'est pas uniforme. Appelons $[\varphi(z)]$ sa *détermination prin-*

[1] Je suppose p réel pour simplifier.

cipale (celle qui est développable en série entière autour de l'origine) et désignons par la caractéristique L la branche du logarithme qui se réduit, pour les valeurs réelles et positives de la variable, à la détermination arithmétique. L'expression générale des valeurs de $\varphi(z)$ est

$$[\varphi(z)] = \frac{2k\pi i}{\Gamma(p)}(\mathrm{L}z + 2h\pi i)^{p-1},$$

si l'on a tourné k fois autour de $z = 1$ et h fois autour de $z = 0$. On voit que ce dernier point est singulier pour toutes les branches de $\varphi(z)$ autres que la branche principale.

La fonction $\mathrm{L}\frac{1}{x}$ étant positive pour $0 < x < 1$, l'équation $\varphi(z) = 0$ ne peut avoir sur le plan principal, outre la racine nulle, que des racines réelles et supérieures à 1.

Pour $z < 0$, $\varphi(z)$ prend des valeurs réelles et négatives, et le rapport positif

$$\frac{\varphi(z)}{z}$$

décroît à mesure que la valeur absolue de z augmente.

Quand z devient infini avec un argument différent de zéro, le rapport $\frac{\varphi(z)}{z}$ tend vers zéro.

Qu'arrive-t-il enfin lorsque z tend vers 1? Si $p > 1$, $\varphi(z)$ reste fini, et l'on a

$$\varphi(1) = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1}\frac{dx}{1-x},$$

car l'intégrale du second membre conserve alors un sens. Mais, si $p < 1$, posons

$$z = 1 - \varepsilon e^{\theta i}, \qquad \varepsilon > 0, \qquad \theta = \pi.$$

Le changement de variable $\mathrm{L}\frac{1}{x} = t\varepsilon$ donne

$$\mathrm{J} = \frac{\Gamma(p)(1-\varepsilon)^{1-p}\varphi(z)}{z} = e^{(1-p)\theta i}\int_0^\infty t^{p-1}\frac{\varepsilon}{e^t - 1 - \varepsilon e^{\theta i}}\,dt.$$

Faisons tendre ε vers zéro, θ restant fixe,

$$\lim \mathrm{J} = e^{(1-p)\theta i}\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{t + e^{\theta i}}\,dt.$$

Soit $\tau = te^{\theta i}$. On trouve bien facilement

$$\lim \mathrm{J} = \int_{e^{\theta i}}^{\infty} \frac{\tau^{p-1}}{1-\tau}\,d\tau = \frac{\pi}{\sin p\pi} = \Gamma(p)\Gamma(1-p).$$

Donc, lorsque z tend vers 1, $\varphi(z)$ a pour valeur asymptotique

$$\frac{\Gamma(1-p)}{(1-z)^{1-p}}.$$

C'est un résultat que M. Appell avait déjà établi en supposant $\theta = 0$ (1).

21. Le cas de la série

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty n^p z^n$$

peut se traiter de la même façon.

Si p est un entier positif, $\varphi(z)$ est une fraction rationnelle ayant $z = 1$ pour pôle unique d'ordre $p+1$. Le produit

$$(1-z)^{p+1}\varphi(z)$$

est en effet développable par la formule de Taylor, et les coefficients du développement (comme on le voit de proche en proche) sont, à partir d'un certain rang, les différences d'ordre $p+1$ des quantités n^p. Ces coefficients sont nuls. Donc $(1-z)^{p+1}\varphi(z)$ se réduit à un polynome $P(z)$ et la conclusion se trouve ainsi établie.

Si p est positif sans être entier, appelons q l'entier qui lui est immédiatement supérieur. On a

$$\varphi(z) = \frac{z}{\Gamma(q-p)}\int_0^1 \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{q-p-1}\frac{Q(zx)}{(1-zx)^{q+1}}\,dx,$$

en posant

$$(1-z)^{q+1}\sum_1^\infty n^q z^{n-1} = Q(z),$$

et l'étude de $\varphi(z)$ est aisée à faire, puisque $Q(z)$ est un polynome.

Nous voyons, en résumé, que notre méthode permet d'étudier complètement, dans tout le plan, les fonctions définies autour de l'origine par une série du type

$$\sum_1^\infty n^p z^n,$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de p.

Cette proposition s'étend sans difficultés au cas d'une combinaison linéaire des séries précédentes.

(1) P. Appell, *Comptes rendus*; 1878.

Ce premier exemple étant traité avec quelque détail, on voit bien maintenant le mécanisme de la méthode; rien ne serait plus facile que de multiplier les remarques précédentes, et nous pouvons donc, sans insister davantage, aborder la démonstration de théorèmes plus généraux.

22. Considérons le cas où α_n est une fonction analytique de n régulière dans le domaine de l'infini. Soit

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{n^p},$$

la série étant convergente dès que le module de n dépasse une certaine limite. On a

$$|\lambda_p| < \lambda^p,$$

λ désignant une constante positive convenablement choisie. D'où

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^{n-1} dx + \lambda_0,$$

avec

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \frac{\lambda_p \left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{p-1}}{\Gamma(p)}.$$

Il est visible que $\varphi(x)$ est une fonction entière de $\mathrm{L}\frac{1}{x}$.

On a, pour $0 < x < 1$,

$$|\varphi(x)| < \frac{\lambda}{x^\lambda}.$$

Donc, l'intégrale qui donne α_n a un sens dès que n est supérieure à une certaine valeur n_0. Par conséquent,

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \mathrm{P}(z) + z \int_0^1 \varphi(x) \frac{z^n x^n}{1 - zx} dx + \frac{\lambda_0 z^{n_0+1}}{1 - z},$$

en posant

$$\mathrm{P}(z) = \sum_0^{n_0} \alpha_n z^n.$$

La conclusion est immédiate : *$f(z)$ est une fonction non uniforme, holomorphe en tout point du plan, sauf pour $z = 1$ et $z = \infty$.* Les diverses particularités de $f(z)$ peuvent être étudiées sur l'expression précédente. Remarquons seulement que $z = 0$ est un point singulier pour toutes les branches de $f(z)$ autres que la branche principale.

Les mêmes conclusions subsistent si le développement de α_n contient un nombre fini de termes affectés d'exposants positifs, *par exemple si le point* α *est un pôle pour* α_n.

Enfin rien n'empêche de traiter aussi le cas où α_n est exprimable par une série procédant suivant des puissances positives *quelconques* de $\frac{1}{n}$, *en particulier le cas où* α_n *est une fonction algébrique de* n *régulière à l'infini ou n'y ayant qu'un pôle* [1].

Nous retrouvons ainsi, d'une façon tout à fait simple, un résultat signalé déjà par M. Fabry et relatif au cas où α_n est une *fraction rationnelle de* n. Mais nous avons en plus le moyen de découvrir toutes les propriétés des fonctions définies par les séries de Taylor considérées, puisque nous en possédons une représentation analytique valable pour tout le plan.

Je citerai les exemples suivants :

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{z^n}{n^2-1} = z\int_0^1 \sin\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1-zx}$$

et

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}} z^n = z\int_0^1 \mathrm{J}_0\left(2\sqrt{a\,\mathrm{L}\frac{1}{x}}\right)\frac{dx}{1-zx},$$

qui nous seront utiles plus loin. Dans le second exemple, J_0 désigne la fonction de Bessel. Remarquons que le premier donne une expression analytique très simple, et valable pour tout le plan, d'une transcendante que les travaux de Tchebicheff ont montrée ne pouvoir résulter d'aucune combinaison de fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques en nombre limité.

En résumé, nous savons désormais faire l'étude complète des séries où α_n *est développable suivant des puissances de* $\frac{1}{n}$ *dont quelques-unes seulement (en nombre fini) peuvent être négatives.*

Il est parfois possible de déduire de là des généralisations. Si, par exemple, on a

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{\infty} \lambda_p e^{-\frac{a_p}{n}},$$

la série $\sum_{1}^{\infty} |\lambda_p|$ étant convergente et les nombres a_p étant positifs, il vient

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_n z^n = z\int_0^1 \varphi(x)\frac{dx}{1-zx}.$$

---

[1] On a alors pour α_n un développement suivant les puissances de $n^{-\frac{1}{q}}$, q étant entier.

avec

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} \lambda_p J_0\left(2\sqrt{\alpha_p L \frac{1}{x}}\right).$$

Comme le module de $J_0(t)$ est toujours inférieur à 1 pour t réel, on voit que $\varphi(x)$ remplit les conditions prescrites. Ici la coupure peut être effective, car $\varphi(x)$ n'est pas forcément analytique.

23. De ce qui précède peut se conclure un théorème auquel j'ai été conduit en même temps que M. Leau [1].

Soit

$$S = \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda_p}{n^p} = S_n + R_n,$$

avec

$$S_n = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{n^n}.$$

Nous savons étudier la série

$$\sum_{1}^{\infty} S\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

donc aussi la série

$$\sum_{1}^{\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

puisque celle-ci ne diffère de la première que par la soustraction de la troisième série

$$\sum_{1}^{\infty} R_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

qui définit évidemment une fonction entière.

Sans insister sur les conséquences que l'on peut tirer de là, remarquons que si les coefficients α_n sont quelconques, un procédé d'étude consiste à essayer de les mettre sous la forme

$$\alpha_n = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{n^n},$$

en calculant les valeurs des λ_p à l'aide des équations linéaires précédentes. Ces équations, en nombre infini, sont résolubles de proche en proche, puisque chacune d'elles contient seulement une inconnue de plus que les précédentes.

[1] LEAU, *Journal de Mathématiques*, 1899.

L'unique condition requise est que la série

$$\sum_{0}^{\infty} \lambda_n t^n$$

ne soit pas toujours divergente.

24. Après avoir examiné le cas où α_n est une fonction analytique de n régulière à l'infini, supposons que $n = \alpha$ soit un point singulier de α_n. Nous imaginerons d'abord que ce point soit singulier pour α_n, non pas en lui-même, mais comme limite de points singuliers.

On a

$$\frac{1}{(n-a_p)^{b_q}} = \int_0^1 \frac{x^{a_p}\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{b_q-1}}{\Gamma(b_q)} x^{n-1}\,dx,$$

si les parties réelles de a_p et de b_q sont positives. Si donc α_n est de la forme

$$\sum\sum \frac{\lambda_{p,q}}{(n-a_p)^{b_q}},$$

les parties réelles de a_p et de b_q étant positives et la série

$$\sum\sum \left|\frac{\lambda_{p,q}}{a_p^{b_q}}\right|$$

étant convergente, on pourra étudier dans tout le plan la fonction $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$. Diverses généralisations sont d'ailleurs immédiates. On trouve, par exemple,

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{n^2 - \gamma_p^2} = \int_0^1 \left[\sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{\gamma_p} \sin\left(\gamma_p \mathrm{L}\frac{1}{x}\right)\right] x^{n-1}\,dx,$$

sous certaines conditions très larges qu'il serait bien facile d'écrire.

On atteint ainsi des cas étendus où le coefficient général α_n est donné par une série simple ou multiple de fractions simples. Je me contenterai de signaler brièvement une application.

Soit

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} z^n.$$

On a

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \mathrm{C} + n\sum_1^\infty \frac{1}{p(n+p)},$$

C désignant la constante d'Euler. D'où

$$\varphi(z) = \frac{C}{z-1} + z\int_0^1 L\frac{1}{1-x}\,\frac{dx}{(1-zx)};$$

et l'on voit que $\varphi(z)$ n'a pas d'autres points singuliers que $z=1$ et $z=\infty$.

D'une façon générale, je vais montrer que cette conclusion subsiste *si α_n est la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini n'ayant que des zéros simples à parties réelles négatives.*

Soient p le genre et $-a_q$ un zéro de la fonction entière. On a, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler,

$$\alpha_n = P(n) + \sum_0^\infty \left[\frac{1}{n+a_q} - \frac{1}{a_q} - \ldots + (-1)^p \frac{n^{p-1}}{a_q^p}\right].$$

P désignant un polynome de degré p et la série $\sum_0^\infty \frac{1}{|a_q|^{p+1}}$ étant convergente. Nous n'avons pas à nous préoccuper de la série

$$\sum_0^\infty P(n)\,z^n$$

dont l'étude est immédiate (n° 21). Cela posé, le second terme de α_n peut s'écrire

$$(-1)^p n^p \sum_0^\infty \frac{1}{a_q^p(n+a_q)};$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$(-1)^p n^p \int_0^1 \varphi(x)\,x^{n-1}\,dx,$$

en vertu des remarques énoncées plus haut. Mais on a (n° 21)

$$\sum_1^\infty n^p (zx)^{n-1} = \frac{Q(zx)}{(1-zx)^{p+1}}.$$

D'où

$$\sum_1^\infty \alpha_n z^n = \sum_1^\infty P(n)\,z^n + (-1)^p z\int_0^1 \varphi(x)\,\frac{Q(zx)}{(1-zx)^{p+1}}\,dx,$$

et la question est résolue.

Finalement, nous avons le théorème suivant :

Si α_n est la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini n'ayant que des zéros simples à parties réelles négatives, la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *n'a que les points singuliers* $z = 1$ *et* $z = \infty$ (¹).

Il n'y aurait aucune difficulté à étendre ces considérations au cas où la fonction entière aurait des zéros multiples. Mais, sans plus insister, je passe à l'examen du cas où α_n est une fonction entière de n, ce qui va nous donner un nouveau théorème.

25. Etablissons d'abord un lemme. On sait, depuis les travaux de M. Hadamard, que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *représente une fonction entière est que la quantité* $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}}$ *tende vers zéro quand n augmente indéfiniment*. Nous allons généraliser ce résultat et démontrer que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *représente une fonction uniforme dans tout le plan n'ayant à distance finie qu'un point singulier* $z = \frac{1}{\lambda}$ *est que l'on ait*

$$\alpha_n = a_n + b_n \lambda^n,$$

les quantités

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |\Delta^{n} b_0|^{\frac{1}{n}}$$

tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment. On a posé, dans cet énoncé,

$$\Delta^n b_0 = b_n - C_n^1 b_{n-1} + C_n^2 b_{n-2} - C_n^3 b_{n-3} + \ldots + (-1)^n b_0,$$

conformément aux notations usitées dans la théorie des différences, les lettres C_n^p désignant les coefficients binomiaux.

En effet, soit $f(z)$ une fonction uniforme n'ayant à distance finie qu'un seul point singulier : $z = \frac{1}{\lambda}$. La formule de Laurent nous donne

$$f(z) = H(z) + G\left(\frac{1}{1 - \lambda z}\right).$$

H et G désignant deux fonctions entières.

(¹) Un déplacement de quelques rangs dans la série permet de traiter le cas plus général où les pôles de α_n sont tous situés à gauche d'une parallèle quelconque à oy.

Il est clair que $f(z)$ est développable, autour de o, par la formule de Taylor

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n.$$

Le cercle de convergence a pour rayon $\frac{1}{|\lambda|}$.

On peut écrire

$$\alpha_n = a_n + b_n \lambda^n$$

et $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro, puisque a_n est le coefficient du terme de rang n dans $H(z)$. Étudions b_n.

Soit

$$G(t) = \sum_0^\infty c_p t^{p+1}.$$

Le changement de variable

$$\frac{u}{u-1} = v, \qquad \frac{v}{v-1} = u,$$

fait dans l'égalité

$$G\left(\frac{1}{1-u}\right) = \sum_0^\infty b_n u^n,$$

donne

$$\frac{G(1-v)}{1-v} = -\sum_0^\infty b_n \frac{v^n}{(v-1)^{n+1}} = \sum_0^\infty (-v)^n \Delta^n b_n.$$

Or, le premier membre est une fonction entière de v. Donc $|\Delta^n b_n|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Les conditions énoncées sont ainsi *nécessaires*.

Il est facile de voir qu'elles sont aussi *suffisantes*. En effet, le calcul précédent permet de déterminer H et G comme fonctions entières à partir des a_n et b_n, pourvu que les quantités

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |\Delta^n b_n|^{\frac{1}{n}}$$

tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Plus généralement, la condition nécessaire et suffisante pour que la série de Taylor $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ représente une fonction uniforme dans tout le plan n'ayant qu'un nombre limité de points singuliers

$$\frac{1}{\lambda_0}, \quad \frac{1}{\lambda_1}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\lambda_p}$$

est que l'on ait

$$z_n = a_n + \sum_0^p b_{n,i} \lambda_i^n,$$

les quantités

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |\Delta^n b_{0,i}|^{\frac{1}{n}}$$

tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Il serait possible, sans aucun doute, d'étendre ces considérations, à l'aide du théorème de M. Mittag-Leffler, au cas de fonctions uniformes possédant une infinité dénombrable de points singuliers, au moins sous certaines réserves.

Je me bornerai à faire remarquer que, si l'on peut réaliser l'égalité

$$z_n = a_n + \lambda^n b_n \int_0^1 \varphi(x) x^n dx,$$

on a

$$f(z) = \mathrm{H}(z) + \int_0^1 \varphi(x) \mathrm{G}\left(\frac{1}{1 - \lambda z x}\right) dx.$$

L'étude de la fonction $f(z)$ est alors facile, et certaines généralisations sont d'ailleurs immédiates.

26. Nous allons appliquer ces résultats au cas où l'on a

$$z_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p,$$

la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p a^p$$

définissant une fonction entière de a. Ici,

$$\Delta^n z_n = \lambda_n + \sum_{n+1}^\infty \frac{\lambda_p}{p!} [n^p - \mathrm{C}_n^1 (n-1)^p + \mathrm{C}_n^2 (n-2)^p - \mathrm{C}_n^3 (n-3)^p + \ldots],$$

en vertu de théorèmes bien connus relatifs à la théorie des différences ; d'où

$$|\Delta^n z_n| < \lambda_n |1 + \mathrm{M}(2e)^n|,$$

M désignant une certaine constante. Donc $|\Delta^n z_0|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro en même temps que $|\lambda_n|^{\frac{1}{n}}$. Ainsi, *si z_n est une fonction entière de n du type indiqué* (1).

(1) Il suffit, en particulier, que z_n soit une fonction entière de n *d'ordre apparent inférieur à* 1.

la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *définit une fonction* $f(z)$ *uniforme n'ayant à distance finie que le point singulier* $z = 1$: $f(z)$ *est d'ailleurs régulière à l'infini.*

Soit, par exemple,

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1} g\left(\frac{1}{n+1}\right) J_0(2i\sqrt{n}),$$

J_0 désignant la fonction de Bessel et g une fonction holomorphe de $\frac{1}{n+1}$. On a

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n = \int_0^1 \varphi(x) G\left(\frac{1}{1-zx}\right) dx,$$

en vertu de ce qui précède, et l'étude de la série peut se faire sur cette formule.

Si α_n était développable suivant les puissances de $n^{\frac{1}{p}}$, les autres conditions restant remplies et p désignant un entier positif, on écrirait :

$$\alpha_n = \varphi_0(n) + n^{\frac{1}{p}} \varphi_1(n) + \ldots + n^{\frac{p-1}{p}} \varphi_{p-1}(n);$$

chacune des lettres φ_i représente une fonction entière de n du type précédent, et l'on serait ainsi ramené à une combinaison linéaire des solutions que nous savons obtenir.

Exemple :

$$\alpha_n = e^{\sqrt[3]{n}} = \sum_0^\infty \frac{n^p}{(3p)!} + \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \sum_0^\infty \frac{n^{p+1}}{(3p+1)!} + \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \sum_0^\infty \frac{n^{p+1}}{(3p+2)!};$$

d'où

$$\sum_1^\infty \alpha_n z^n = z G_1\left(\frac{1}{1-z}\right)$$
$$+ \frac{z}{\Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}} G_2\left(\frac{1}{1-zx}\right) dx + \frac{z}{\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^1 \left(L\frac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} G_3\left(\frac{1}{1-zx}\right) dx,$$

formule obtenue immédiatement par application des diverses remarques énumérées ci-dessus et dans laquelle les lettres

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3$$

désignent des fonctions entières aisément calculables.

27. Le cas où α_n est une fonction entière de n peut encore être traité par une méthode se rapprochant davantage de celle qui nous occupe dans ce Mémoire.

Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty x_n z^n,$$

avec

$$x_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p,$$

la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p a^p,$$

ayant un certain cercle de convergence. Posons

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_p a^p \cos p\theta,$$

$$e^{\frac{n}{a}\cos\theta} \cos\left(\frac{n}{a}\sin\theta\right) = \sum_0^\infty \frac{1}{p!}\frac{n^p}{a^p}\cos p\theta.$$

Supposons a choisi de façon que la série $\varphi(\theta)$ converge. Alors on a

$$x_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\theta) e^{\frac{n}{a}\cos\theta} \cos\left(\frac{n}{a}\sin\theta\right) d\theta$$

et

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\theta) \frac{1 - z e^{\frac{\cos\theta}{a}} \cos\left(\frac{\sin\theta}{a}\right)}{1 - 2z e^{\frac{\cos\theta}{a}} \cos\left(\frac{\sin\theta}{a}\right) + z^2 e^{\frac{2\cos\theta}{a}}} d\theta.$$

D'où le prolongement de la série $f(z)$.

Supposons, pour fixer les idées, a réel et positif. *On voit que $f(z)$ est uniforme et holomorphe dans toute la région du plan située du même côté que l'origine par rapport à une certaine courbe.* Cette courbe constitue une coupure qui peut n'être pas essentielle. En posant

$$z = x + iy,$$

on trouve une représentation paramétrique de la coupure

$$x = e^{\frac{\cos\theta}{a}} \cos\left(\frac{\sin\theta}{a}\right), \qquad y = e^{\frac{\cos\theta}{a}} \sin\left(\frac{\sin\theta}{a}\right);$$

et, pour construire la courbe, il suffit de faire varier θ de $-\pi$ à $+\pi$. Plusieurs cas sont à distinguer.

Si a peut être pris aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire si la série $\sum_0^\infty \lambda_p a^p$ définit une fonction entière, la coupure se réduit à une petite courbe fermée entourant le point 1. La fonction $f(z)$ est alors uniforme et holomorphe dans tout le plan, sauf au point 1, qui est un pôle ou un point essentiel. On peut prendre, par exemple, pour α_n l'une des expressions suivantes

$$\frac{e^{\sqrt{n}}+e^{-\sqrt{n}}}{2}, \quad \cos(\sqrt{n}), \quad \sum_0^\infty e^{-p^2} n^p.$$

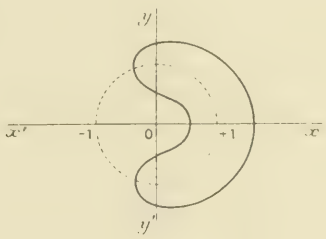
Elles appartiennent toutes au type étudié.

Si l'on a

$$0 < \frac{1}{a} < \pi,$$

la coupure affecte la forme qu'indique la *fig.* 1 ci-dessous. La fonction $f(z)$ est uni-

Fig. 1.



forme et holomorphe à l'extérieur de cette courbe. Tel est le cas où

$$\alpha_n = \sum_0^\infty e^{-p(1-p)} n^p.$$

On peut prendre ici

$$a = e$$

(ou, tout au moins, a peut être pris aussi peu inférieur qu'on le veut à e), comme l'apprend l'emploi de la valeur asymptotique de $\Gamma(p+1)$. Tel est encore le cas où $\alpha_n = J_0(n)$, qui correspond à $a = 1$ [1].

Enfin, si

$$\frac{1}{a} = \pi,$$

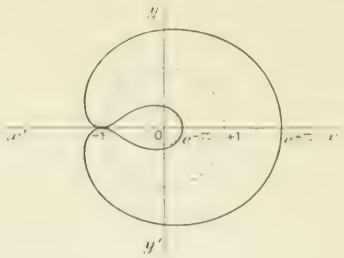
---

[1] On a

$$J_0(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(nt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{n^{2p}}{(1.3.5\ldots 2p-1)^2} = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{1.3.5\ldots 2p-1}{2.4.6\ldots 2p}\,\frac{n^{2p}}{1.2\ldots p}.$$

la coupure a la forme indiquée (*fig.* 2). On n'a aucun renseignement sur $f(z)$, à moins que le rayon de convergence de $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ ne soit inférieur à 1. La même

Fig. 2.



circonstance a lieu pour $\frac{1}{a} \geq \pi$. Pour citer un exemple de ce cas, je prendrai

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \lambda_p \frac{\pi^p n^p}{p!},$$

avec

$$0 < \lambda_p < \lambda.$$

Le rayon de convergence a ici pour valeur $e^{-\pi}$, si les λ_p sont convenablement choisis. Le raisonnement précédent montre alors que la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ n'a que le point $e^{-\pi}$ comme point singulier situé sur le cercle de convergence.

28. On peut encore retrouver les mêmes résultats à l'aide du théorème des résidus. Soit, en effet,

$$G(x) = \sum_0^\infty \lambda_p x^p.$$

Il vient

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{x^n} \frac{G(x)}{x} dx;$$

d'où

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G(x)}{x} \frac{dx}{1 - z e^{x^n}},$$

C désignant un contour fermé qui englobe l'origine.

Je n'insisterai pas sur ce point. Mais je ferai cependant remarquer que, si l'on a

$$\alpha_n = b_n \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!} n^p,$$

la quantité $|\Delta^n b_0|^{\frac{1}{n}}$ tendant vers zéro quand n devient infini, on peut écrire

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{G(x)}{x} G_1\left(\frac{1}{1 - z e^{\frac{1}{x}}}\right) dx,$$

G_1 étant une fonction entière.

La méthode indiquée dans ce paragraphe est particulièrement avantageuse, si l'on connaît les points singuliers de la série

$$G(u) = \sum_0^\infty \lambda_p u^p.$$

Dans ce cas, en effet, il vient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{x} G\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1 - z e^{x}},$$

C désignant un contour qui renferme à son intérieur toutes les singularités de $G\left(\frac{1}{x}\right)$. On peut prendre pour contour C un contour formé des pièces suivantes : 1° un petit cercle entourant l'origine; 2° des petits cercles entourant chacun des points singuliers α de $G\left(\frac{1}{x}\right)$; 3° des morceaux de courbes reliant chacun de ces derniers cercles au premier. Le contour C est ainsi une sorte de lacet multiple. Cela posé, la coupure est donnée ici par l'équation

$$z = e^{-x},$$

quand x décrit C. On voit que c'est un lacet multiple analogue au précédent, dont le centre est le point 1 et dont les branches vont tourner autour des points $e^{-\alpha}$. *La fonction $f(z)$ est holomorphe dans tout le point, sauf peut-être aux points $z = 1$ et $z = e^{-\alpha}$.*

29. Nous savons traiter le cas où α_n est une fonction entière de n d'ordre inférieur à 1. On pourrait songer, pour faire la discussion d'une série quelconque, à mettre son coefficient général α_n sous la forme d'une fonction entière à l'aide des procédés d'interpolation. Il est aisé de voir que cela ne donnerait rien de simple. Supposons en effet, pour plus de simplicité, que la série $\sum_0^\infty \alpha_n$ soit convergente (¹). Posons

$$\varphi(\theta) = \sum_0^\infty \alpha_n \cos n\theta.$$

(¹) Si cette condition n'était pas remplie, mais que le rayon de convergence de $\sum \alpha_n z^n$ fût égal à 1, on opérerait, par exemple, sur les nombres $e^{-\alpha_n}$.

On déduit de là

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(\theta)\cos n\theta\, d\theta.$$

D'où

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^p n^{2p}}{(2p)!}\int_0^{\pi} \varphi(\theta)\theta^{2p}\, d\theta,$$

et α_n est bien mis sous forme d'une fonction entière. Mais ici

$$\lambda_{2p} = \int_0^{\pi} \varphi(\theta)\theta^{2p}\, d\theta.$$

On a donc, en général,

$$a = \frac{1}{\pi},$$

et l'on ne peut rien conclure. *Les méthodes d'interpolation nous ramènent à un problème précisément aussi difficile que celui du prolongement : l'étude de la série trigonométrique* $\varphi(\theta)$.

30. Un théorème semblable à celui du n° 23 peut être énoncé ici. Posons

$$\alpha_n = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_p}{p!} n^p = S_n + R_n,$$

avec

$$S_n = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{1!} n + \frac{\lambda_2}{2!} n^2 + \ldots + \frac{\lambda_n}{n!} n^n.$$

Admettons que la série

$$\sum_0^{\infty} \lambda_p a^p$$

définisse une fonction entière. Nous savons étudier la série

$$\sum_0^{\infty} \alpha_n z^n,$$

donc aussi la série

$$\sum_0^{\infty} S_n z^n,$$

car celle-ci ne diffère de la première que par la soustraction de la troisième série

$$\sum_0^{\infty} R_n z^n,$$

qui représente évidemment une fonction entière.

Si les coefficients α_n sont quelconques, on peut essayer de les mettre sous la forme

$$\alpha_n = S_n,$$

en calculant les λ_p à l'aide de ces équations linéaires. L'unique condition requise est que la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p a^p$$

converge pour toute valeur de a.

31. Nous arrivons maintenant à des théorèmes plus généraux pour l'établissement desquels nous devrons seulement supposer que α_n *est une fonction analytique de n holomorphe dans un certain domaine auquel appartiennent les grandes valeurs positives de n.*

Il ne sera plus nécessaire ici de faire comme précédemment des hypothèses complètes sur la nature analytique de α_n dans le voisinage du point ∞. Les seules conditions requises seront de l'espèce suivante : α_n *devra vérifier certaines inégalités asymptotiques.*

Quoi qu'il en soit, voici tout d'abord un principe qui semble devoir être fécond dans l'étude de la question qui nous occupe.

La méthode des représentations conformes, utilisée par M. Lindelöf [1] dans la théorie du prolongement analytique pour transformer une série de Taylor en d'autres séries analogues ayant des régions de convergence variées et de plus en plus grandes, peut encore servir à mettre une fonction donnée par son développement taylorien sous la forme d'une intégrale définie semblable à celles que nous avons considérées plus haut. Le changement de variable porte alors, non sur la série même, mais sur l'expression du coefficient α_n.

Supposons d'abord que α_n soit une fonction analytique de n holomorphe pour toutes les valeurs de n dont la partie réelle est supérieure à $-\frac{1}{2}$. Faisons la transformation d'Euler :

$$\frac{n}{n+1} = t, \qquad \frac{t}{1-t} = n;$$

il vient

$$\alpha_n = \sum_0^\infty \lambda_p \left(\frac{n}{n+1}\right)^p,$$

la série étant valable pour toutes les valeurs de n considérées. Admettons, pour commencer, que la série $\sum_0^\infty \lambda_p$ soit absolument convergente ou, tout au moins,

[1] *Loc. cit.*

absolument sommable au sens de M. Borel : cela signifie, comme on sait, que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x}\left|\sum_0^\infty \frac{\lambda_p x^p}{p!}\right| dx$$

a un sens.

On a

$$(1)\qquad \alpha_n = \lambda_0 = \int_0^\infty e^{-x} e^{-\frac{x}{n}} \sum_0^\infty \frac{\lambda_{p+1} x^p}{p!}\, dx,$$

pour toutes les valeurs entières de n à partir de 1 : cela résulte de la théorie des intégrales eulériennes.

On déduit de là

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\lambda_0 z}{1-z} = \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}} z^n \sum_0^\infty \frac{\lambda_{p+1} x^p}{p!}\, dx.$$

Mais nous avons vu (n° 22) que

$$\sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}} z^n = z\int_0^1 J_0\left(2\sqrt{x \mathrm{L}\frac{1}{y}}\right)\frac{dy}{(1-zy)^2},$$

J_0 désignant la fonction de Bessel.

Prenons, dans le plan de la variable z, un domaine T qui ne contienne à son intérieur aucun point de la portion $(+1, +\infty)$ de l'axe réel. Quelle que soit la position du point z dans ce domaine et quelle que soit d'ailleurs la valeur positive attribuée au paramètre x, on peut assigner un nombre positif M auquel restent inférieurs les modules de la fonction $\sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}} z^n$ et de sa dérivée par rapport à z. On voit donc que l'intégrale qui donne $f(z)$ est absolument convergente. Il en est de même de la seconde intégrale obtenue en dérivant la première par rapport à z. On conclut de là que *$f(z)$ est une fonction analytique de z, holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que* 1. D'ailleurs, au voisinage de l'origine, on a

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

comme il est aisé de le vérifier. *Le prolongement de cette série est donc effectué.*

On peut évidemment intervertir l'ordre des intégrations; d'où

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\lambda_0 z}{1-z} = z\int_0^1 \varphi(y)\frac{dy}{(1-zy)^2},$$

avec

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-x} J_0\left(2\sqrt{x \mathrm{L}\frac{1}{y}}\right) \sum_0^\infty \frac{\lambda_{p+1} x^p}{p!} dx.$$

Nous revenons ainsi aux formes étudiées plus haut.

La partie $(+1, +\infty)$ de OX est, pour $f(z)$, une coupure qui peut être essentielle, car $\varphi(y)$ n'est pas forcément analytique.

D'une façon générale, l'étude complète de $f(z)$ est possible sur cette expression *qui est valable pour tout le plan.*

32. Quelles sont les conditions d'application du théorème précédent? On en trouvera sans peine de *suffisantes,* en utilisant les conditions données par M. Hadamard [1] pour qu'une série de Taylor $\left(\text{ici } \sum_0^\infty \lambda_p t^p\right)$ soit absolument convergente sur le cercle de convergence (ici de rayon 1). Voici un cas simple :

A la circonférence $|t| = 1$, correspond la droite $n = -\frac{1}{2} + i\lambda$, λ variant par valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons, ce qui ne restreint nullement la généralité, que α_n soit holomorphe même sur cette droite. Nous voulons que la fonction $\beta(t)$, en laquelle se transforme α_n par le changement de variable, soit développable pour $|t| = 1$ en série trigonométrique absolument convergente. Comme $\beta(t)$ est holomorphe sur ce cercle, sauf peut-être pour $t = 1$, il n'y a de difficultés que pour ce point. Or

$$\alpha_n = \beta(t), \qquad (n+1)^2 \frac{d\alpha_n}{dn} = \frac{d\beta(t)}{dt}, \qquad (n+1)^2 \frac{d}{dn}\left[(n+1)^2 \frac{d\alpha_n}{dn}\right] = \frac{d^2\beta(t)}{dt^2}.$$

D'où l'énoncé suivant : *Il suffit que les expressions précédentes tendent chacune vers une limite finie lorsque t tend vers 1 en restant à l'intérieur du cercle de rayon 1 ou sur ce cercle.*

J'ajoute que les mêmes propositions demeurent vraies, si α_n est seulement holomorphe lorsque la partie réelle de n surpasse une certaine quantité positive n_0. Il suffit, pour s'en assurer, de négliger quelques-uns des premiers termes de $\sum^\infty \alpha_n z^n$, ce qui ne change rien aux conclusions, et d'appliquer notre théorème à la série $\sum_0^\infty \alpha_{n+p} z^n$, p désignant un entier positif convenablement choisi.

Enfin, on pourra encore traiter les cas où il sera possible de déterminer un

[1] *Thèse*, p. 67-70.

nombre rationnel θ compris entre 0 et 1, tel que

$$\alpha_n = e^{n^\theta} a_n,$$

a_n remplissant les conditions énumérées ci-dessus (¹).

Pour nous rendre compte du degré de généralité ainsi atteint, *supposons α_n holomorphe dès que la partie réelle de n dépasse une certaine limite.* Admettons, pour fixer les idées, que cette limite soit négative : on sait que cette restriction n'a rien d'essentiel. Cela étant, posons $n = \rho e^{i\omega}$ et supposons que n grandisse indéfiniment avec un argument au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. *S'il existe un nombre rationnel θ compris entre 0 et 1 tel que la quantité $\frac{L|\alpha_n|}{\rho}$ soit d'ordre inférieur à $\frac{1}{\rho^\theta}$ quand ρ devient infini, ω restant dans les limites voulues, la méthode précédente réussira et la fonction*

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

sera holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour z réel, et plus grand que 1. En effet, on pourra alors écrire

$$\alpha_n = e^{n^\theta} e^{-n^\theta} \alpha_n,$$

et la quantité $e^{-n^\theta}\alpha_n$ remplira les conditions prescrites pour qu'on puisse appliquer le théorème du n° 31.

Voici quelques exemples :

1° Si α_n est une fonction de $\frac{1}{Ln}$ holomorphe dès que $|Ln|$ est assez grand;

2° Si α_n est une fonction de n holomorphe au voisinage de l'origine et étudiable par les procédés de prolongement exposés dans ce Chapitre, le point -1, par exemple, étant son seul point singulier;

3° Si α_n est une fonction entière de Ln,

$$\alpha_n = \sum_0^\infty a_p (Ln)^p,$$

pourvu que les coefficients a_p obéissent (pour p infini) à certaines inégalités asymptotiques (²).

(¹) Cela résulte de ce qu'on sait étudier la série $\sum_0^\infty e^{n^\theta} z^n$ (n° 26).

(²) Il suffit que la fonction entière considérée soit d'ordre fini, mais ce n'est pas nécessaire; on peut prendre simplement a_p, de manière que $a_p = \frac{\theta^p}{(L_p)^p}$ $(0 < \theta < 1)$. — *Voir* HADAMARD, *Mémoire sur les fonctions entières* (*Journal de Mathématiques*, 1893).

33. Dans tous les cas traités jusqu'ici, α_n était holomorphe dès que la partie réelle de n surpassait une certaine limite. C'est qu'en effet on peut prendre, comme type des coefficients α_n étudiés plus haut, ceux qui sont de la forme

$$G(n)\int_0^1 \varphi(x)x^n\,dx,$$

$G(n)$ désignant une fonction entière d'ordre inférieur à 1. Or l'intégrale qui figure dans cette expression, si elle est convergente pour une valeur n_0, définit en général une fonction de n holomorphe pour toutes les valeurs de n dont la partie réelle est plus grande que n_0.

Mais il serait bien facile de généraliser ces résultats. Il suffirait de remplacer la transformation d'Euler, dans les calculs du n° 31, par le changement de variable

$$t = 1 - \frac{1}{(n-1)^p}.$$

On pourrait alors se borner à supposer α_n holomorphe dans la région du plan (n) obtenue en posant

$$n = \rho e^{i\omega},$$

et en prenant

$$\rho > \rho_0, \qquad |\omega| < \frac{\pi}{2p},$$

ρ_0 désignant une certaine constante.

D'une façon générale, il suffit que α_n soit une fonction holomorphe de n dans un domaine angulaire contenant, à son intérieur, l'axe réel positif du plan n.

Mais c'est là un point que je me contenterai d'avoir indiqué.

34. Je vais développer maintenant une méthode générale de recherche.

Je me contenterai d'ailleurs de préciser la partie principale des théorèmes que je veux établir, sans essayer d'atteindre exactement la frontière de leur domaine d'application.

Dans une première étude comme celle-ci, il faut, en effet, viser surtout à la simplicité des résultats.

Soit donc la série

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

convergente aux environs de l'origine. J'appelle

$$g(t) = \sum_0^\infty \gamma_n t^n$$

une fonction holomorphe pour les petites valeurs de t. Imaginons que tous les points singuliers de cette fonction soient situés à gauche de l'axe imaginaire du plan t. Pour plus de simplicité, je supposerai même que $t = -1$ est le seul point singulier de $\alpha(t)$, mais cette restriction n'a rien d'essentiel. Quoi qu'il en soit, je prends

$$\alpha_n = \alpha(n),$$

et je vais étudier la fonction $f(z)$ correspondante.

La méthode de sommation des séries divergentes exposée par M. Borel conduit à la formule suivante

$$\alpha_n = \int_0^{+\infty} e^{-a} G(an)\, da,$$

où

$$G(an) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_p a^p n^p}{p!}.$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs de n dont la partie réelle est supérieure à -1, en tout cas dans une région qui contient l'axe réel positif du plan n. Quant à a, c'est un paramètre positif.

Posons

$$\varphi(z, a) = \sum_0^{\infty} G(an) z^n;$$

il vient

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{-a} \varphi(a, z)\, da,$$

et tout revient à discuter cette solution formelle.

On a

$$G(an) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{1}{x} \alpha\left(\frac{1}{x}\right) e^{nax}\, dx,$$

C désignant un contour fermé qui contient à son intérieur l'origine et les points singuliers de $\alpha\left(\frac{1}{x}\right)$. D'où

$$\varphi(z, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{1}{x} \alpha\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1 - ze^{ax}}.$$

La coupure se déduit du contour C par la formule

$$z = e^{-ax},$$

et il faut supposer que le point z est du même côté que l'origine par rapport à cette coupure.

Plaçons-nous spécialement dans le cas où $t = -1$ est la seule singularité

de $\alpha(t)$. Donnons à a une valeur positive quelconque. Cela posé, choisissons le contour C de la manière suivante : 1° un cercle C_1 de rayon $\frac{\lambda\pi}{2a}$ ayant l'origine pour centre; 2° un cercle égal C_2 ayant le point -1 pour centre; 3° une portion L de l'axe réel pour relier les deux cercles. Le contour C est ainsi une sorte de double lacet. Quant à λ, c'est une fonction de a toujours positive et tendant vers zéro quand a augmente indéfiniment.

Désignons par $\theta(a)$ le maximum du module de la quantité $\frac{1}{x}\alpha\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x décrit C. Cette fonction $\theta(a)$ est bien déterminée dès qu'on a choisi λ.

A partir d'un point d'abscisse inférieure à 1, mais aussi voisine de 1 qu'on veut, traçons deux demi-droites symétriques par rapport à l'axe réel positif et faisant avec celui-ci un angle ω aussi petit qu'il plaira. Soit T la région du plan qui contient l'origine par rapport à l'angle que forment ces deux droites, angle dont l'axe réel positif est la bissectrice intérieure. Nous supposerons que z reste dans T.

La coupure a pour équation

$$z = e^{-ax}.$$

L'argument correspondant à un point de cette coupure a pour valeur 0 sur L et $-\frac{\lambda\pi}{2}\sin\varphi$ sur C_1 et C_2, φ étant l'argument de x. La coupure elle-même se compose de deux petites courbes fermées entourant l'une le point $z = 1$ et l'autre le point $z = e^a$, reliées par un morceau de l'axe réel positif. On peut toujours supposer λ assez petit pour que, quelle que soit la valeur positive ou nulle de a, toute cette coupure soit intérieure à l'angle considéré plus haut. Je supposerai même λ tellement choisi que l'on ait

$$|1 - ze^{ax}| > \delta,$$

z étant dans T et x sur C, et δ désignant une constante positive. Cela est évidemment possible, comme on le voit en suivant le point ze^{ax} quand x décrit C.

Dans ces conditions, on a

$$|\varphi(z, a)| < \frac{M}{\delta}\theta(a),$$

M désignant une certaine constante. *Alors, pourvu que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-z\theta(a)}da$$

ait un sens, $f(z)$ est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1.

Pour appliquer ce théorème, tout revient à voir dans chaque cas que l'on peut choisir la fonction $\lambda(a)$ $\left(\text{assujettie seulement à être positive et à tendre vers zéro avec } \frac{1}{a}\right)$, de façon que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\,\theta(a)\,da$$

ait un sens. On vérifiera, par exemple, que cela est possible si

$$\alpha_n = e^{\frac{n}{\mathrm{L}(n+1)}}.$$

Nous parvenons à étudier ainsi une fonction qui échappait aux méthodes des n°s 31 et 32. Il va de soi, d'ailleurs, qu'une fois ce cas traité il devient possible de traiter comme au n° 32 le cas où

$$\alpha_n = e^{\frac{n}{\mathrm{L}(n+1)}}\,a_n,$$

a_n vérifiant les conditions requises pour l'application du théorème du n° 31.

35. Rendons-nous compte maintenant du degré de généralité obtenu.

Pour cela, remarquons d'abord que, si α_n est une fonction entière de n, le contour C du numéro précédent se réduit au cercle C_1 décrit de l'origine comme centre. On a alors

$$\theta(a) = \text{Max. de } \left|\frac{2a}{\lambda\pi}\,e^{i\varphi}\,\alpha\left(\frac{2a}{\lambda\pi}\,e^{i\varphi}\right)\right|,$$

lorsque φ varie de o à 2π. Cela étant, il est bien clair que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\,\theta(a)\,da$$

aura un sens, pourvu que, si l'on pose $n = \rho e^{i\omega}$, la quantité $\frac{\mathrm{L}|\alpha_n|}{\rho}$ tende vers zéro (ou du moins ait zéro comme limite supérieure) lorsque ρ augmente indéfiniment, ω étant quelconque.

Supposons maintenant que α_n, holomorphe pour $\rho > \rho_0$ et $|\omega| < \omega_0$, ρ_0 et ω_0 étant deux nombres positifs quelconques, soit tel que la quantité $\frac{\mathrm{L}|\alpha_n|}{\rho}$ ait zéro pour limite supérieure quand ρ devient infini, ω restant moindre que ω_0 en valeur absolue. On pourra toujours concevoir une fonction entière $\mathrm{G}(n)$ qui présente les caractères indiqués à l'alinéa précédent et qui soit telle, en outre, que le quotient

$$\frac{\alpha_n}{\mathrm{G}(n)}$$

remplisse les conditions voulues pour l'application des théorèmes exposés aux n°s 31 et 33. Cela résulte de ce fait qu'il existe des fonctions entières dépourvues de zéro *de n'importe quel type de croissance*. En réunissant alors tous les résultats obtenus plus haut, nous pouvons formuler la conclusion suivante :

La fonction $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour* z *réel et plus grand que* 1, *si, en posant* $n = \rho e^{i\omega}$, *le coefficient général* α_n *est une fonction analytique de* n *holomorphe pour* $\rho > \rho_0$ *et* $|\omega| < \omega_0$ (ρ_0 *et* ω_0 *étant deux nombres positifs quelconques*) *et si la quantité* $\frac{L|\alpha_n|}{\rho}$ *a pour limite supérieure zéro quand* ρ *devient infini,* ω *restant moindre que* ω_0 *en valeur absolue.*

J'espère que ces brèves indications paraîtront suffisantes pour faire entrevoir le degré de généralité que possèdent les méthodes de prolongement étudiées dans ce Chapitre. Au surplus, je me propose de revenir prochainement sur cette question. Pour le moment, je cherche surtout des exemples simples. Mais il importait cependant de marquer les frontières du domaine où s'applique notre méthode.

36. Pour finir, je citerai un théorème où intervient le rapport $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ et qui rapproche la présente théorie de celle de la convergence des séries.

Mais je dois établir d'abord, à titre de lemme, au moins dans un cas particulier, une proposition qui d'ailleurs est intéressante par elle-même et sur laquelle nous reviendrons plus loin pour l'étudier en général.

Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx$$

et

$$\int_0^1 |\varphi(x)| \, dx < M,$$

M désignant une constante positive. On a

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{dx}{1 - zx}.$$

Imaginons un petit cercle de rayon δ décrit de $z = 1$ comme centre, deux tangentes à ce cercle symétriques par rapport à l'axe réel et se rencontrant sur celui-ci entre les points 0 et 1, enfin la région T du plan située du même côté

que l'origine par rapport à l'angle (aussi aigu que l'on veut, si δ est assez petit) limité par les deux tangentes précédentes que l'on arrête à leur point de concours. Tant que le point z est dans T, le point zx y est aussi et l'on a, par conséquent,

$$\left|\frac{1}{1-zx}\right| < \frac{1}{\delta}.$$

D'où

$$|f(z)| < \frac{M}{\delta},$$

inégalité qui va jouer un rôle fondamental.

Posons

$$f_p(z) = \sum_0^\infty \alpha_n^p z^n,$$

p désignant un entier positif. Il vient

$$f_p(z) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_p)\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_p}{1-zx_1x_2\ldots x_p},$$

le nombre des signes intégraux superposés étant égal à p. Lorsque le point z est dans T, le point $zx_1x_2\ldots x_p$ y est aussi. D'où

$$|f_p(z)| < \frac{M^p}{\delta}.$$

Considérons alors une fonction entière quelconque $G(t)$ et la série

$$F(z) = \sum_0^\infty G(\alpha_n) z^n.$$

Si l'on a

$$G(\alpha_n) = \sum_0^\infty \lambda_p \alpha_n^p,$$

il vient

$$F(z) = \sum_0^\infty \lambda_p f_p(z),$$

et l'on voit que $F(z)$ est une fonction holomorphe dans T, pourvu que la série

$$\sum_0^\infty |\lambda_p| M^p$$

soit convergente. Cette dernière condition est d'ailleurs remplie si $G(t)$ est une

fonction entière. Mais il suffit que $G(t)$ soit holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à M.

Lorsque $G(t)$ a un rayon de convergence inférieur ou égal à M, on peut poser

$$F(a, z) = \sum_0^\infty \lambda_p a^p f_p(z),$$

a étant un paramètre. Le théorème précédent s'applique pour les petites valeurs de a. Tout revient alors à effectuer le prolongement de $F(a, z)$ regardée comme fonction de a. Divers artifices le permettent souvent. On devra finalement faire $a = 1$.

Quoi qu'il en soit, je me bornerai à l'énoncé suivant :

Si α_n est de la forme

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx,$$

avec

$$\int_0^1 |\varphi(x)| dx < M,$$

la série

$$\sum_0^\infty G(\alpha_n) z^n$$

est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1, pourvu que la fonction $G(t)$ soit holomorphe elle-même dans un cercle de rayon supérieur à M.

Prenons, par exemple,

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Ici $M = 1$. On peut donc prendre pour $G(\alpha_n)$ l'une des expressions e^{α_n}, $\sin\alpha_n$, $\cos\alpha_n$, $L\left(1 + \frac{\alpha_n}{2}\right)$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 1}}$, ...

37. Cela posé, soit

$$a_n = 1 + \sum_1^\infty \frac{\lambda_p}{n^p},$$

une fonction de $\frac{1}{n}$ holomorphe dès que le module de n dépasse une certaine valeur. Si l'on a

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = a_n,$$

la série

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

a l'unité pour rayon de convergence.

Posons

$$\mathrm{L}\alpha_n = f(n), \qquad \mathrm{L}a_n = \varphi(n).$$

Il vient

$$f(n+1) - f(n) = \varphi(n),$$

et nous sommes ramenés à calculer l'*intégrale finie* de $\varphi(n)$. Or

$$\varphi(n) = \sum_1^\infty \frac{\mu_p}{n^p},$$

à cause des propriétés bien connues de la fonction logarithmique. La quantité

$$\varphi(n) - \mu_1 \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \varphi_1(n)$$

est développable suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, l'exposant le plus petit étant égal à 2. Posons alors

$$f(n) = f_1(n) + \mu_1 \mathrm{L}n.$$

On a

$$f_1(n+1) - f_1(n) = \varphi_1(n).$$

Mais il existe (n° 12) une fonction $\Phi(x)$ telle que

$$\varphi_1(n) = \int_0^1 \Phi(x) x^{n-1}\, dx.$$

Essayons de prendre

$$f_1(n) = \int_0^1 \mathrm{F}(x) x^{n-1}\, dx.$$

Il viendra

$$\int_0^1 \mathrm{F}(x) x^n\, dx - \int_0^1 \mathrm{F}(x) x^{n-1}\, dx = \int_0^1 \Phi(x) x^{n-1}\, dx,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\Phi(x)}{x-1}.$$

Or (n° 12) $\Phi(x)$ s'annule pour $x = 1$, puisque $\varphi_1(n)$ commence par un terme en $\frac{1}{n^2}$. Donc l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x)}{x-1} x^{n-1}\, dx$$

a un sens, et nous avons bien ainsi une solution de notre équation aux différences finies.

Soit

$$f(n) = \mu_1 \mathrm{L}n + \int_0^1 \frac{\Phi(x)}{x-1} x^{n-1} dx + \mathrm{LC},$$

C désignant une constante laissée arbitraire pour le moment. Cette formule est vraie pour toutes les valeurs de n qui surpassent une certaine limite n_0.

On conclut de là

$$\alpha_n = \mathrm{C} n^{\psi_1} e^{\int_0^1 \frac{\Phi(x)}{x-1} x^{n-1} dx}.$$

La constante C est déterminée de façon que le premier des coefficients α_n que l'on peut mettre sous cette forme ait bien la valeur voulue.

On sait étudier la série

$$\sum n^{\psi_1} z^n.$$

Utilisons d'autre part le théorème du numéro précédent. On a le résultat que voici :

Si le rapport $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ de deux coefficients consécutifs dans la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ est développable en une série de la forme

$$1 + \sum_1^\infty \frac{\lambda_p}{n^p},$$

convergente dès que le module de n est assez grand, la fonction analytique définie par la série considérée est holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour z réel et plus grand que 1.

J'ajoute que, d'une façon générale, on peut, dans ce cas, faire l'étude complète de $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$.

On pourrait étendre ce théorème au cas où $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ est développable suivant des puissances fractionnaires de $\frac{1}{n}$: la démonstration serait toute semblable.

Enfin, et je terminerai sur cette remarque, les mêmes procédés réussissent encore si la différence

$$\mathrm{L}\alpha_{n+1} - \mathrm{L}\alpha_n$$

peut être mise sous la forme

$$\int_0^1 \varphi(x) x^n dx,$$

la fonction $\frac{\varphi(x)}{x-1}$ restant finie (ou du moins intégrable) pour $x = 1$.

38. En terminant ce Chapitre, je tiens à rappeler le but que j'y poursuivais et le véritable caractère des théorèmes que j'y ai démontrés.

J'ai proposé une méthode *pratique* pour étudier dans tout le plan une fonction donnée par une série de Taylor et j'ai montré sur quelques *exemples* le parti qu'on pouvait tirer de cette méthode.

Il est bien clair que le nombre des applications possibles est infini, qu'il y a encore beaucoup à trouver dans la même voie et que l'expérience est seule capable d'indiquer quels sont les *critères de prolongeabilité* qu'il y a le plus d'avantages à établir.

V. — Généralisations diverses.

39. Les résultats précédents peuvent être généralisés d'un très grand nombre de manières que je ne puis songer à énumérer ici. Je me bornerai à indiquer deux ou trois théorèmes simples.

Soit une série

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

pour laquelle on a

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx.$$

Nous avons vu que la fonction donnée par cette série est représentable dans tout le plan par une certaine intégrale définie.

Cela posé, je dis qu'*on en peut déduire une infinité d'autres fonctions qui présentent le même caractère*. Voici quelques exemples :

On a

$$\Delta^{(n)} \alpha_0 = \int_0^1 \varphi(x)(x-1)^n \, dx = (-1)^n \int_0^1 \varphi(1-y) y^n \, dy.$$

Donc la série $\sum_0^\infty z^n \Delta^{(n)} \alpha_0$ est, elle aussi, étudiable dans tout le plan. Elle se déduit d'ailleurs de la série donnée par la *transformation d'Euler*. Sa somme est $\frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{1-z}\right)$.

Soit $X_n(x)$ un polynome de Legendre. Désignons par $X_n[(\alpha)]$ ce que devient $X_n(x)$ quand on y remplace en général x^p par α_p. On a

$$X_n[(\alpha)] = \int_0^1 \varphi(x) X_n(x) \, dx.$$

D'où

$$\sum_0^\infty X_n[(\alpha)]z^n = \int_0^1 \varphi(x)\frac{dx}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

La coupure est ici la moitié du cercle de rayon 1 correspondant aux valeurs de z dont la partie réelle est positive.

Rien n'empêcherait, dans ce dernier exemple, de substituer aux polynomes de Legendre d'autres fonctions analogues, pourvu que l'on connaisse également la fonction génératrice de celles-ci. On peut prendre, par exemple, les puissances successives d'un polynome quelconque. Si donc α_n est de la forme supposée, il existe des suites de nombres $\lambda_{p,n}$ dépendant de n tels qu'en posant

$$\beta_n = \lambda_{0,n}\alpha_0 + \lambda_{1,n}\alpha_1 + \ldots + \lambda_{\nu,n}\alpha_\nu,$$

ν désignant un entier fonction de n, la série $\sum_0^\infty \beta_n z^n$ soit étudiable dans tout le plan.

On peut même envisager des fonctions entières au lieu de polynomes. Ainsi

$$\beta_n = \cos[(\alpha)\theta n] = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p \alpha_{2p}\theta^{2p}n^{2p}}{(2p)!} = \int_0^1 \varphi(x)\cos(n\theta x)\,dx.$$

D'où

$$\sum_0^\infty \beta_n z^n = \int_0^1 \varphi(x)\frac{1-z\cos(\theta x)}{1-2z\cos(\theta x)+z^2}\,dx.$$

La coupure va sur le cercle de rayon 1 du point $z = e^{-i\theta}$ au point $z = e^{+i\theta}$ en passant par le point $z = 1$.

On conçoit sans peine que ces procédés de généralisation puissent être variés à l'infini; on obtient de la sorte des coupures de formes quelconques.

Je citerai, pour finir, un autre type de méthode. Soit λ_p une constante. Appelons α_n^p la $p^{\text{ième}}$ dérivée de α_n par rapport à n. Il vient

$$\beta_n = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p}{p!}\alpha_n^p = \int_0^1 \varphi(x)\sum_0^\infty \frac{(-1)^p\lambda_p}{p!}\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^p x^n\,dx,$$

et, pourvu que l'on ait par exemple

$$|\lambda_p| < \lambda^p,$$

λ désignant une certaine constante positive, on voit que la série $\sum_1^\infty \beta_n z^n$ est étudiable dans tout le plan.

40. Pour aller plus loin, je pourrais m'appuyer sur un théorème très remarquable dû à M. Hadamard [1].

D'après ce théorème, la série $\sum_0^\infty a_n b_n z^n$ ne peut avoir, *dans tout le plan*, d'autres points singuliers que ceux que l'on obtient en multipliant l'affixe d'un point singulier de $\sum_0^\infty a_n z^n$ par l'affixe d'un point singulier de $\sum_0^\infty b_n z^n$.

On peut utiliser effectivement ce théorème, dès qu'on a formé un tableau de séries particulières dont les points singuliers sont connus : or c'est ce que nous permet de faire la méthode exposée au Chapitre précédent.

Mais je préfère développer quelques considérations directes qui ne supposent pas démontré le théorème de M. Hadamard.

Considérons la série

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

et supposons que l'on ait

$$\alpha_n = a_n b_n$$

avec

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx.$$

Soit

$$F(t) = \sum_0^\infty b_n t^n,$$

une fonction dont on sache effectuer le prolongement dans tout le plan et déterminer les points singuliers. Il viendra

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) F(zx) \, dx,$$

et les principes exposés au Chapitre III permettront de faire l'étude complète de $f(z)$.

J'ai déjà signalé une application relative au cas où $|\Delta^{(n)} b_0|^{\frac{1}{n}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On en aurait une autre en prenant b_n tel que $F(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire. C'est ce qui arrive en particulier s'il existe, entre un certain nombre fixe de coefficients b_n consécutifs, une relation récurrente linéaire dont

[1] *Acta mathematica*, t. XXII.

les coefficients soient des polynomes en n; $F(t)$ satisfait alors à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes en t [1].

Si $F(t)$ est méromorphe dans tout le plan, on peut l'étudier en suivant la marche exposée par M. Hadamard dans la seconde partie de sa Thèse et le prolongement de $f(z)$ est encore possible.

Un cas particulier intéressant est celui où b_n est le coefficient général d'une série récurrente. On a alors

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) R(zx)\, dx,$$

R désignant une fraction rationnelle.

Si l'on a

$$b_n = \int_0^1 \psi(y) y^n\, dy,$$

on peut écrire

$$f(z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(x)\psi(y)}{1 - zxy}\, dx\, dy.$$

Plus généralement, on voit que, si les séries

$$\sum_0^\infty a_n z^n, \qquad \sum_0^\infty b_n z^n, \qquad \ldots \qquad \sum_0^\infty l_n z^n$$

sont étudiables par les procédés du Chapitre précédent, il en sera de même de la série

$$\sum_0^\infty P(a_n, b_n, \ldots, l_n) z^n,$$

où P désigne un polynome : la démonstration se fait aisément de proche en proche.

Supposons, par exemple, que le rapport $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ soit une fraction rationnelle $\frac{P(n)}{Q(n)}$. Posons

$$P(n) = (n + a_1)(n + a_2)\ldots(n + a_q),$$
$$Q(n) = (n + b_1)(n + b_2)\ldots(n + b_q).$$

Alors le rayon de convergence est égal à l'unité et l'on a

$$x_n = x_0 \frac{P(0)P(1)\ldots P(n-1)}{Q(0)Q(1)\ldots Q(n-1)}.$$

---

[1] Il faut évidemment que le point $t = 0$ ne soit pas un point singulier de l'équation différentielle.

Il faut admettre évidemment qu'aucune des quantités a ou b n'est *nulle* ou *entière et négative*. Si cette condition est remplie, on voit que α_n est (au facteur α_0 près) le produit de $2q$ termes dont les q premiers sont de la forme

$$\lambda_{p,n} = \frac{a_p(a_p+1)\ldots(a_p+n-1)}{n!}$$

et les q derniers de la forme

$$\mu_{p,n} = \frac{n!}{b_p(b_p+1)\ldots(b_p+n-1)}.$$

Or

$$\sum_0^\infty \lambda_{p,n} z^n = (1-z)^{-a_p}.$$

D'autre part

$$\mu_{p,n} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(b_p)}{\Gamma(n+b_p)} = n\,\mathrm{B}(n, b_p) = n\int_0^1 (1-x)^{b_p-1} x^{n-1}\,dx,$$

si la partie réelle de b_p est positive. Alors la série

$$\sum_0^\infty \mu_{p,n} z^n$$

n'a pas d'autres points singuliers que $z=1$ et $z=\infty$. Cette conclusion subsiste d'ailleurs si la partie réelle de b_p est négative (pourvu que b_p ne soit pas un entier négatif), comme on le constate en étudiant la série

$$\sum_0^\infty \mu_{p,n+h} z^n,$$

h étant un entier positif convenablement choisi. *Donc, dans tous les cas, on sait étudier* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$: *les seuls points singuliers de cette série sont* $z=1$ *et* $z=\infty$. Un grand nombre de séries usuelles rentrent dans ce type auquel appartient notamment la série hypergéométrique.

Remarquons que, si les parties réelles des a_p sont toutes comprises entre 0 et 1, on peut écrire

$$\lambda_{p,n} = \frac{\sin(\pi a_p)}{\pi}\,\mathrm{B}(a_p+n, 1-a_p) = \frac{\sin(\pi a_p)}{\pi}\int_0^1 y^{a_p-1}(1-y)^{-a_p} y^n\,dy.$$

Si alors les parties réelles des b_p sont toutes positives, il vient

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_0 z \frac{\prod_1^q \sin(\pi a_p)}{\pi^q}$$
$$\times \int_0^1 \prod_1^q \left(\frac{y_p}{1-y_p}\right)^{a_p} \prod_1^q (1-x_p)^{b_p-1} \mathrm{R}(zx_1,\ldots x_q y_1,\ldots y_q)\, dx_1\ldots dx_q dy_1\ldots dy_q,$$

en posant

$$\mathrm{R} = \sum_0^\infty n^q (zx_1\ldots x_q y_1\ldots y_q)^{n-1}.$$

J'ajoute que R est une fraction rationnelle.

11. Revenons à la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{P}(\alpha_n) z^n,$$

P désignant un polynome, et cherchons à remplacer le polynome $\mathrm{P}(\alpha_n)$ par une fonction entière $\mathrm{G}(\alpha_n)$. Je me bornerai à l'examen d'un cas simple.

Soit

$$\alpha_n = (n+1)^q \int_0^1 \varphi(x) x^n\, dx$$

avec

$$\int_0^1 |\varphi(x)|\, dx < \mathrm{M},$$

q désignant un nombre positif quelconque.

Appelons p un entier positif et posons, en général,

$$f_p(z) = \sum_0^\infty \alpha_n^p z^n.$$

Nous allons chercher une limite supérieure de $|f_p(z)|$ quand z reste dans un certain domaine T.

Ce domaine sera défini de la façon suivante : Prenons sur l'axe réel positif du plan z un point appartenant au segment $(0, 1)$ et aussi voisin du point 1 que nous voudrons. Ce point étant choisi, traçons deux demi-droites formant un angle qui admette le point considéré comme sommet et l'axe réel positif comme bissectrice intérieure. Le domaine T contiendra, par hypothèse, tous les points situés du même côté que l'origine par rapport à cet angle. Soit δ la distance du

point 1 aux côtés de l'angle. J'imagine le cercle C de centre 1 et de rayon δ et j'appelle C' un cercle concentrique de rayon plus petit ε. La quantité δ peut être prise aussi petite que l'on veut, mais elle restera fixe, de même que ε.

Cela posé, on a

$$f_p(z) = \int_0^1 \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_p)\sum_0^\infty (n+1)^{pq} x_1^n x_2^n \ldots x_p^n z^n \, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p,$$

chacune des p intégrations étant relative à l'intervalle (0, 1). Posons en général, α étant positif,

$$\sum_0^\infty (n+1)^\alpha t^n = R_\alpha(t).$$

Il viendra

$$|f_p(z)| < M^p \text{ Max. de } |R_{pq}(zx_1x_2\ldots x_p)|.$$

Or, tant que le point z reste dans le domaine T, le point $zx_1x_2\ldots x_p$ y reste aussi, puisque les x varient seulement de 0 à 1. Tout revient donc à calculer en général la quantité

$$\text{Max. de } |R_\alpha(t)|,$$

quand t reste dans T.

On a

$$(n+1)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_L \frac{e^{(n+1)y}}{y^{\alpha+1}}\,dy,$$

le chemin d'intégration étant composé : 1° de l'axe réel négatif depuis $-\infty$ jusqu'à une valeur négative quelconque $-a$; 2° d'un cercle décrit de O comme centre avec a pour rayon; 3° de l'axe réel négatif depuis $-a$ jusqu'à $-\infty$. D'où

$$R_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i\pi}\int_L \frac{e^y}{1-te^y}\,\frac{dy}{y^{\alpha+1}}.$$

Cette formule représente $R_\alpha(t)$ dans tout le plan, sauf une coupure qui correspond au contour d'intégration par l'égalité

$$t = e^{-y}.$$

On voit que cette coupure est constituée par un lacet partant du point $+\infty$, longeant l'axe réel, tournant autour de $t = 1$ et retournant à $+\infty$ le long de l'axe réel. Je puis toujours supposer que le contour L est choisi de façon que la boucle du lacet qui lui correspond circule autour de $t = 1$ entre le cercle C' de rayon ε défini plus haut et un cercle concentrique intérieur C'' de rayon ε' également fixe.

Cela étant, on a

$$|e^{-y} - t| > \delta - \varepsilon,$$

quels que soient t dans T et y sur L. D'où

$$|R_\alpha(t)| < \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi}\frac{1}{\delta-\varepsilon}\left[2\int_\varepsilon^\infty \frac{dy}{y^{\alpha+1}} + \int_{C''}\left|\frac{dy}{y^{\alpha+1}}\right|\right],$$

c'est-à-dire

$$|R_\alpha(t)| < \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\pi(\delta-\varepsilon)}\left(\frac{1}{\alpha}+\pi\right)\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}.$$

Par suite,

$$|f_p(z)| < \frac{1}{\pi(\delta-\varepsilon)}\left(\frac{M}{\varepsilon^{q}}\right)^p \Gamma(pq+1)\left(\pi+\frac{1}{pq}\right);$$

et cette formule est valable quel que soit z dans T.

Dans ces conditions, la série

$$\sum_0^\infty \lambda_p f_p(z)$$

définira une fonction de z holomorphe dans T, pourvu que le produit

$$\lambda_p \Gamma(pq+1)$$

soit le coefficient général d'une fonction entière.

Supposons λ_p ainsi choisi. Soit

$$G(u) = \sum_0^\infty \lambda_p u^p.$$

La série

$$f(z) = \sum_0^\infty G(\alpha_n) z^n$$

définira une fonction de z holomorphe dans T. Comme les demi-droites qui limitent T peuvent former un angle aussi aigu que l'on veut, on voit qu'en définitive $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan sauf peut-être sur une coupure rectiligne allant de $z=1$ à $z=\infty$ le long de l'axe réel positif.

On peut prendre pour G une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{q}$. Si $q=0$, on peut prendre pour G une fonction entière quelconque, car alors $|f_p(z)|$ reste inférieur à $\frac{M^p}{\delta}$, comme on le voit directement.

Remarquons que la méthode précédente permet d'assigner à $|f(z)|$ une limite supérieure indépendante de z et valable pour tout le domaine infini T. Nous verrons plus loin l'importance de cette remarque. C'est surtout à cause d'elle que j'ai développé les calculs précédents. M. Leau [1], qui a traité une question toute

[1] *Journal de Mathématiques*, 1899.

semblable et qui a même poussé la discussion un peu plus loin, n'établit pas cette conclusion.

Pour donner un exemple, je partirai de la formule

$$\frac{1}{(n+1)^{p+1}} = \int_0^1 \frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^p}{\Gamma(p+1)} x^n\, dx.$$

Dérivons par rapport à p et faisons ensuite $p = -1 + \eta$, η étant un nombre positif quelconque. Il vient

$$\mathrm{L}(n+1) = (n+1)^\eta \int_0^1 \left[\frac{\Gamma'(\eta)}{\Gamma(\eta)} - \mathrm{LL}\frac{1}{x}\right] \frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^{1-\eta}}{\Gamma(\eta)} x^n\, dx.$$

Ici l'on a $q = \eta$. Si donc G désigne une fonction entière d'ordre fini, la série

$$\sum_0^\infty \mathrm{G}[\mathrm{L}(n+1)] z^n$$

est étudiable par notre méthode.

On déduit de là

$$\left|\sum_0^\infty z^n [\mathrm{L}(n+1)]^p\right| < \frac{1}{\pi(\delta - \varepsilon)} \left(\frac{\mathrm{M}}{\varepsilon^\eta}\right)^p \Gamma(p\eta + 1)\left(\pi + \frac{1}{p\pi}\right),$$

tant que z reste dans T. Soit alors, par exemple,

$$\alpha_n = \mathrm{L}(n+1) \int_0^1 \varphi(x) x^n\, dx.$$

On pourra faire, à partir de ce coefficient α_n, des constructions analogues à celles que nous avons faites plus haut. On obtiendra des conclusions semblables et l'on voit ainsi comment la méthode exposée peut être généralisée à l'infini.

Mais je n'insisterai pas davantage, et je passe à un autre ordre d'idées.

42. Il est évident qu'une combinaison linéaire quelconque de séries étudiables par les méthodes du Chapitre précédent est encore étudiable par les mêmes méthodes.

Si l'on peut écrire

$$\alpha_n = a_n + b_n,$$

la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ étant étudiable par nos procédés et la série $\sum_0^\infty b_n z^n$ ayant un rayon

de convergence supérieur à celui de la première, le prolongement analytique de la série $\sum_0^\infty a_n z^n$ peut être effectué jusqu'au cercle de convergence de $\sum_0^\infty b_n z^n$. Un cas particulier intéressant est celui où cette dernière série définit une fonction entière : l'étude de la série donnée peut alors être faite dans tout le plan.

De pareilles décompositions d'une série entière en une somme de plusieurs autres séries de même espèce peuvent être variées à l'infini, suivant les besoins du calcul. J'indiquerai un dernier exemple, relatif au cas où a_n est une fonction de n analogue à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Des séries d'exponentielles, telles que celles que M. Cahen [1] a envisagées dans sa Thèse ou même plus générales, vont jouer ici le rôle essentiel. L'expérience montre que ce cas, très fréquemment réalisé dans la pratique, est celui de la plupart des fonctions usuelles qui possèdent plusieurs points singuliers.

Soit

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n,$$

avec

$$a_n = \sum_0^\infty \lambda_{p,n} \xi_p^n.$$

Posons

$$\varphi_p(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_{p,n} (\xi_p z)^n.$$

Il vient

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \varphi_p(z),$$

et, si les fonctions φ_p sont étudiables par les méthodes indiquées plus haut, il en est de même de φ. Quant aux conditions de convergence requises, elles sont aisées à déterminer dans chaque cas.

On a, par exemple, pour $|z| < 1$,

$$\mathrm{L}\,\Gamma(1 - z) = Cz + \tfrac{1}{2}\zeta(2) z^2 + \ldots + \frac{1}{n}\zeta(n) z^n + \ldots,$$

C désignant la constante d'Euler et $\zeta(s)$ la fonction de Riemann. Or

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\,dx.$$

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*; 1894.

D'où

$$\mathrm{L}\Gamma(1-z) = \mathrm{C}z + z^2 \sum_0^{\infty} \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x\,dx}{p - zx}.$$

On a ainsi l'extension de $\mathrm{L}\Gamma(1-z)$ à tout le plan.

On voit par là comment, malgré les apparences, les théorèmes du Chapitre IV peuvent servir à l'étude de fonctions dont la distribution des points singuliers est quelconque.

43. Je terminerai par deux remarques.

Avant de transformer une série en une intégrale, il peut être bon de la multiplier par un facteur connu dans tout le plan. Soit, par exemple,

$$f(z) = \sum_0^{\infty} (\mathrm{L}n!)\, z^n.$$

On a

$$(1-z)^2 f(z) = \sum_1^{\infty} \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right) z^{n+1};$$

d'où

$$f(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} \int_0^1 \frac{x-1}{\mathrm{L}x} \frac{dx}{1-zx},$$

expression très simple qui donne $f(z)$ dans tout le plan.

Enfin, avant de mettre une série sous forme d'intégrale, il peut être bon aussi d'effectuer préalablement une représentation conforme suivant les procédés étudiés par M. Lindelöf [1]. On a alors, par exemple,

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \alpha_n z^n = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{1 - x\psi(z)}\, dx,$$

$\psi(z)$ désignant une fonction holomorphe autour de l'origine et qui s'annule en ce point, et l'on peut obtenir ainsi des coupures de forme quelconque.

VI. — Le problème des moments.

44. Un lien existe entre les méthodes que nous venons d'étudier et le *problème des moments*, posé par Stieltjes dans son grand Mémoire sur les fractions continues [2].

---

(1) *Acta Societatis fennicae*; 1898.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*; 1894-1895.

Étant donnée une suite dénombrable de quantités

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$

peut-on construire une fonction $\varphi(x)$ intégrable dans l'intervalle $(0, +\infty)$ telle que l'on ait

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x) x^n \, dx,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n? Tel est l'énoncé général du problème des moments. Nous allons examiner le rapport qui unit ce problème à ceux que nous avons déjà résolus.

Deux questions se posent. Il faut d'abord déterminer φ à partir des α_n. Mais, comme Stieltjes le fait remarquer, cette détermination n'est pas possible d'*une façon unique*. En effet, la théorie des intégrales eulériennes montre que l'on a, par exemple,

$$\int_0^\infty e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x} \, x^n \, dx = 0,$$

quel que soit l'entier positif n. Si donc les α_n sont tels qu'*une* solution existe, il y en aura une *infinité* et il importera de chercher un principe qui permette de faire un *choix* parmi ces diverses solutions.

Les considérations que je veux développer à cet égard dépendent des propriétés d'une certaine classe fort intéressante de polynomes entiers en x dont je vais rappeler la définition. On verra que ces polynomes se rapprochent, par l'ensemble de leurs propriétés, de polynomes bien connus, tels que les polynomes de Legendre, les polynomes hypergéométriques ou les polynomes de M. Hermite.

Nous serons incidemment amenés, dans les pages qui suivent, à montrer comment on peut souvent utiliser, pour la représentation analytique des fonctions données par une série de Taylor, des intégrales définies prises entre les limites 0 et $+\infty$.

45. Soit

$$D_n = \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

On a, par la formule de Leibniz sur la dérivation d'un produit,

$$D_n = (-1)^n e^{-x} P_n(x),$$

P_n désignant un polynome entier en x de degré n.

$$P_n(x) = x^n - \frac{n^2}{1} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2} x^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3} x^{n-3} + \ldots + (-1)^n n!.$$

Tels sont les polynomes que je vais étudier.

Des intégrations par parties conduisent aisément à la relation

$$\int_0^\infty e^{-x} P_n(x) \varphi(x)\, dx = 0,$$

où $\varphi(x)$ est un polynome arbitraire de degré $n-1$ au plus. On en déduit

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x} P_p(x) P_q(x)\, dx = 0 \qquad \text{si} \quad p \neq q,$$

ce qui donne, en particulier,

$$\int_0^\infty e^{-x} P_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{si} \quad n \geq 1,$$

car $P_0 = 1$.

Je dis que la relation

$$\int_0^\infty e^{-x} P_n(x) \varphi(x)\, dx = 0,$$

où $\varphi(x)$ est un polynome arbitraire de degré $n-1$, *caractérise* le polynome $P_n(x)$ à un multiplicateur constant près. Soit, en effet, $Q_n(x)$ un second polynome de degré n tel que

$$\int_0^\infty e^{-x} Q_n(x) \varphi(x)\, dx = 0.$$

Appelons C une constante quelconque. Il viendra

$$\int_0^\infty e^{-x} [P_n(x) - C Q_n(x)] \varphi(x)\, dx = 0.$$

Or, prenons C de façon que $P_n(x) - C Q_n(x)$ soit de degré $n-1$ et posons alors

$$\varphi(x) = P_n(x) - C Q_n(x).$$

On devrait avoir

$$\int_0^\infty e^{-x} [P_n(x) - C Q_n(x)]^2\, dx = 0.$$

Donc

$$P_n(x) = C Q_n(x); \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, revenons aux polynomes P_n [1].

---

[1] Ces polynomes P_n peuvent être généralisés de bien des façons, par exemple en considérant les quantités

$$D_q^\alpha = \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^\alpha} x^n),$$

où α désigne un nombre positif quelconque. On peut ainsi obtenir, au sujet du problème des moments, des résultats plus généraux que ceux de ce Chapitre. Mais, pour abréger, je me limiterai au cas simple où $\alpha = 1$.

On a aussi

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-x} P_n^2(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x} P_n(x) x^n\,dx = (n!)^2,$$

comme le montre encore l'intégration par parties; et l'on peut déduire de là une identité que vérifie la fonction Γ.

La formule de Lagrange conduit au développement

$$(3)\qquad \frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{1+t} = \sum_0^\infty \frac{P_n(x)}{n!} t^n.$$

D'où l'on tire la fonction génératrice des quantités P_n,

$$\sum_0^\infty P_n(x) t^n = \int_0^\infty e^{-a} \frac{e^{\frac{at}{1+at}}}{1+at}\,da,$$

en employant le procédé de sommation des séries divergentes indiqué par M. Borel [1]. Cette fonction génératrice est donnée par une série entière qui n'a pas de cercle de convergence; mais la série en question est *sommable* et l'on voit que sa somme (qui remplit d'ailleurs toutes les conditions voulues pour être prise comme fonction génératrice des P_n) est holomorphe en tout point du plan, sauf pour t réel et négatif. La partie négative de l'axe réel du plan (t) est une coupure apparente; en réalité, notre fonction génératrice peut être prolongée à travers cette pseudo-coupure, mais elle n'est pas uniforme. Du reste, si on l'appelle $P(t)$, les expressions

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n P(t)}{dt^n}$$

tendent bien vers les polynomes $P_n(x)$, pourvu que t tende vers zéro en suivant un chemin qui ne rencontre pas la coupure.

Partons de l'égalité

$$e^{xy} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} y^n,$$

et faisons la transformation d'Euler,

$$y = \frac{t}{1+t}, \qquad t = \frac{y}{1-y}.$$

[1] E. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*. IIIe Partie. (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1899.)

Il vient

$$\frac{1}{1-t}e^{\frac{tx}{1-t}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{n!}t^n=\sum_{0}^{\infty}\Delta_0^q\left(\frac{x^p}{p!}\right)t^n,$$

en posant

$$\Delta_0^q\left(\frac{x^p}{p!}\right)=\frac{x^p}{n!}-\frac{n}{1}\frac{x^{p-1}}{(n-1)!}+\ldots+(-1)^n.$$

D'où

$$P_n(x)=n!\,\Delta_0^q\left(\frac{x^p}{p!}\right). \tag{4}$$

On en déduit

$$x^n=P_n+\frac{n^2}{1}P_{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1.2}P_{n-2}+\ldots+1, \tag{5}$$

en vertu des formules bien connues de la théorie des différences. On voit par là qu'un polynome quelconque de degré q en x peut toujours être mis sous la forme d'une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des q premiers polynomes P_n, et cette remarque s'étend même (sous certaines conditions de convergence) au cas d'une série entière en x.

On a

$$(1-t)^2e^{\frac{tx}{1-t}}=\frac{t}{1-t}\sum_{0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{n!}t^n=\sum_{0}^{\infty}\frac{P'_n(x)}{n!}t^n.$$

D'ou

$$\frac{P_n(x)}{n!}=\frac{P'_{n+1}(x)}{(n+1)!}+\frac{P'_n(x)}{n!},$$

en identifiant; ce qui donne

$$P'_{n+1}=(n+1)(P_n-P'_n), \tag{6}$$

relation qui nous sera utile plus loin.

L'égalité

$$\frac{1}{1-t}\int_0^\infty e^{-x}e^{\frac{tx}{1-t}}\frac{x^n}{n!}dx=(1+t)^n$$

conduit, par identification des deux membres, à la formule

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{P_p(x)}{p!}\frac{x^n}{n!}dx=C_n^p, \tag{7}$$

où C_n^p désigne le coefficient binomial bien connu, qui doit être regardé comme nul pour $p>n$.

L'application de la formule de Leibniz à la fonction $x^ne^{-x}(x-1)^p$ fournit immé-

diatement les relations

$$xV' = (n - x)V;$$

d'où

$$xV^{(n+2)} + (n+1)V^{(n+1)} = (n - x)V^{(n+1)} - (n+1)V^{(n)},$$

et, par suite,

$$x\frac{d^2D_n}{dx^2} + (1 + x)\frac{dD_n}{dx} + (n+1)D_n = 0.$$

Finalement, on voit que P_n est une intégrale de l'équation différentielle

$$x\frac{d^2P_n}{dx^2} + (1 - x)\frac{dP_n}{dx} + nP_n = 0. \tag{8}$$

Ayant ainsi une intégrale de cette équation, il est facile d'achever l'intégration et de trouver la solution générale. Appelons Q_n une autre intégrale, distincte de P_n. On a

$$Q_n(x) = \int_0^\infty \frac{e^{x-z}z^n}{(z-x)^{n+1}}dz, \tag{9}$$

comme on le vérifie aisément. On voit que $Q_n(x)$ est une fonction non uniforme holomorphe en tout point du plan (x), sauf à l'origine : la partie positive de l'axe réel est une coupure apparente. Il est d'ailleurs facile de trouver la fonction génératrice des Q_n. C'est

$$\sum_0^\infty Q_n(x)t^n = \int_0^\infty e^{x-z}\frac{dz}{(1-t)z-x} = -\frac{e^x}{x}\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{1-\frac{1-t}{x}z}dz = -\frac{e^x}{x}\sum_0^\infty n!\left(\frac{1-t}{x}\right)^n.$$

La dernière série (dont on connaît le lien avec le logarithme intégral) est *divergente,* mais *sommable* au sens de M. Borel; Laguerre a montré qu'il lui correspond une fraction continue convergente.

Il existe une relation récurrente entre trois polynomes P_n consécutifs,

$$P_{n+1} - (2n + 1 - x)P_n + n^2P_{n-1} = 0. \tag{10}$$

Ces polynomes forment donc une suite de Sturm. On en conclut aisément que l'équation

$$P_n(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles, positives et distinctes.

Si l'on désigne par C un contour fermé qui entoure l'origine du plan (z) et qui est suffisamment petit, il vient

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{e^{x(t)}}{1+t}\frac{dt}{t^{n+1}}. \tag{11}$$

D'où, en changeant de variable d'intégration,

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{(\Gamma)} e^{zx}\frac{(1-z)^n}{z^{n+1}}\,dz,$$

(Γ) étant un nouveau contour fermé. Cette dernière expression est celle qu'on obtiendrait en appliquant la méthode de Laplace à l'équation différentielle (8).

Une autre expression de $P_n(x)$ nous sera plus utile. Si l'on remarque que la fonction J_n de Bessel est donnée par le développement

$$J_n(2\sqrt{t}) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p t^p}{(p!)^2},$$

on voit que

$$(12)\qquad D_n = \int_{(\Gamma)} e^{-2y} y^n J_n(2\sqrt{xy})\,dy = \sum_0^\infty \frac{(-1)^p x^p}{(p!)^2}\Gamma(n-p+1).$$

Cette formule pourrait servir à définir les quantités D_n pour toutes les valeurs de n réelles ou imaginaires; l'interpolation des quantités D_n est ainsi accomplie. De là pourrait encore se déduire une théorie de la quantité D_n regardée comme fonction de son indice.

J'ai présenté, dans ce numéro, un tableau résumé des principales propriétés des polynomes $P_n(x)$. Non pas que je doive me servir ici de toutes ces propriétés. Mais je tenais à les rappeler, parce que je crois les polynomes P_n destinés à jouer un rôle important dans la résolution du problème des moments et, par suite, dans la théorie des fonctions données par un développement taylorien.

46. Arrivons maintenant au *problème des moments*. Il consiste, comme on sait, à résoudre par rapport à φ les égalités

$$\alpha_n = \int_{(\Gamma)}^{\infty} \varphi(x)\,x^n\,dx,$$

pour toutes les valeurs entières et positives de n. Je vais en donner une solution bien déterminée dans un cas assez étendu. Mais quelques lemmes sont d'abord nécessaires.

Soit une série

$$\sum_0^\infty \lambda_n D_n,$$

les λ_n désignant des constantes. Si x est positif, la formule (12) donne

$$D_n(x) = n!.$$

Notre série est donc absolument et uniformément convergente pour $x \geq 0$ sous la seule condition que, si l'on pose

$$\lambda_n n! = g_n,$$

la série

$$\sum_0^\infty |g_n|$$

soit elle-même convergente. On a alors

$$\sum_0^\infty \lambda_n D_n = \int_0^\infty e^{-y} G(y) J_0(2\sqrt{xy})\, dy,$$

en posant

$$G(y) = \sum_0^\infty \lambda_n y^n,$$

ce qui définit une fonction entière de y.

Cela étant, reprenons la formule (11). Soit

$$t = \lambda e^{i\varphi},$$

λ étant compris entre 0 et 1, et φ variant de 0 à 2π. On a

$$|P_n(x)| < \frac{1}{1-\lambda} \frac{n!}{\lambda^n} \text{Max. de } \left| e^{\frac{tx}{1+t}} \right|.$$

Supposons x positif. Tout revient à chercher le maximum de la partie réelle de $\frac{t}{1+t}$ quand t décrit le cercle de rayon λ. Or cette partie réelle est

$$\frac{\lambda^2 + \lambda \cos\varphi}{1 + 2\lambda \cos\varphi + \lambda^2}.$$

Appelons m sa valeur. Il vient

$$\cos\varphi = \frac{(1+\lambda^2)m - \lambda^2}{\lambda(1-2m)}.$$

On voit que m doit être tel que

$$|(1+\lambda^2)m - \lambda^2|^2 \leq \lambda^2(1-2m)^2;$$

d'où

$$-\frac{\lambda}{1-\lambda} \leq m \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Finalement

$$|P_n(x)| < \frac{1}{1-\lambda} \frac{n!}{\lambda^n} e^{\frac{x\lambda}{1-\lambda}};$$

et, par suite,

$$\left|\sum_0^\infty \lambda_n D_n\right| = \frac{1}{1-\lambda} e^{-\frac{x}{1-\lambda}} \sum_0^\infty \frac{|g_n|}{\lambda^n},$$

pour $x \geq 0$.

Si donc on peut trouver un nombre μ supérieur à 1 tel que la série

$$\sum_0^\infty |g_n| \mu^n$$

soit convergente, la fonction

$$x^p \sum_0^\infty \lambda_n D_n$$

est intégrable de 0 à $+\infty$, quel que soit l'entier positif p.

Cela posé, cherchons à réaliser les égalités

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x) x^n \, dx.$$

Posons

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \lambda_p D_p.$$

Il viendra, en vertu de la formule (7),

$$\alpha_n = \sum_0^n (-1)^p \lambda_p p! \, n! \, C_n^p.$$

Or soit

$$\frac{\alpha_n}{n!} = a_n, \qquad (-1)^p \lambda_p p! = l_p.$$

L'égalité précédente peut s'écrire

$$a_n = \sum_0^n C_n^p l_p;$$

d'où

$$l_n = \Delta^{(n)} a_0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{\Delta^{(n)} a_0}{n!}.$$

Finalement

$$\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \sum (-1)^n \frac{\Delta^{(n)} a_0}{n!} y^n J_1(2\sqrt{xy}) \, dy.$$

Mais

$$e^{-\lambda} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \Delta^{(n)} a_0}{n!} y^n = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\alpha_n}{n!} y^n.$$

On a donc

$$\varphi(x) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xy}) \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\alpha_n}{(n!)^2} y^n \, dy.$$

Le problème des moments est résolu, mais par un calcul purement formel. Il faut maintenant discuter la solution obtenue. Je me bornerai, sur ce point qui demanderait des recherches spéciales, à donner quelques indications générales et à signaler quelques exemples.

Tout revient à étudier la fonction $\varphi(x)$ définie par les formules précédentes. Une méthode consisterait à poser

$$\varphi(x, z) = e^{-xz} \sum_0^\infty \frac{\Delta^{(n)} a_0}{n!} P_n(x) z^n.$$

Si a_n est le coefficient général d'une série de Taylor ayant un rayon de convergence fini, il en est de même de $\Delta^{(n)} a_0$, comme le montre la transformation d'Euler, et alors la série $\varphi(x, z)$ converge certainement pour les petites valeurs de z. Le théorème de M. Hadamard permet d'ailleurs d'exprimer $\varphi(x, z)$ au moyen d'une intégrale définie portant sur les deux séries

$$\sum_0^\infty a_n z^n, \qquad \sum_0^\infty \frac{P_n(x)}{n!} z^n,$$

qui sont supposées connues. Il resterait enfin à effectuer le prolongement de $\varphi(x, z)$ et à étudier cette fonction comme fonction de x et z à la fois, particulièrement au voisinage du point $z = 1$, x demeurant positif; et c'est à quoi l'on parviendrait sans peine en faisant sur les a_n des hypothèses semblables à celles du Chapitre IV. Mais je me bornerai, pour abréger, à quelques remarques.

Imaginons d'abord qu'il existe un nombre μ supérieur à 1 tel que la série

$$\sum_0^\infty |\Delta^{(n)} a_0| \mu^n$$

soit convergente. Alors, en vertu des lemmes établis plus haut, la série

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \lambda_n D_n$$

est absolument et uniformément convergente pour $x \geq 0$; elle est intégrable terme à terme dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et l'on a

$$|\varphi(x)| \leq M e^{-\mu x}.$$

M et h désignant deux constantes positives assignables. Dans ces conditions, il n'y a pas de difficultés; nous avons une solution effective du problème des moments. *Cela a lieu notamment si* $|\Delta^n a_0|^{\frac{1}{n}}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *par exemple si* a_n *est une fonction entière de* n *d'ordre inférieur à* 1. Un cas particulier intéressant est celui où a_n est un polynome entier en n : $\varphi(x)$ s'exprime alors par une somme d'un nombre limité de quantités D_n, car $\Delta^n a_0$ est nul à partir d'un certain rang.

Quoi qu'il en soit, le problème des moments est résolu pour les nombres α_n *de la forme*

$$\alpha_n = n!\,G(n),$$

G *désignant une fonction entière d'ordre inférieur à* 1; *et la fonction* $\varphi(x)$, *qui prend place alors dans les formules*

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^n\,dx,$$

est comparable pour les grandes valeurs positives de x *à une exponentielle* e^{-hx} ($h = \text{const.} > 0$).

Cela posé, je vais montrer que, de toute solution du type précédent, on peut déduire une solution analogue pour les nombres $\alpha_n b_n$, b_n ayant la forme

$$\int_0^1 f(t)\,t^n\,dt.$$

En effet, soit

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^n\,dx,$$

avec

$$|\varphi(x)| < M e^{-hx},$$

M et h désignant deux constantes. On a

$$\alpha_n t^n = \int_0^\infty \frac{1}{t}\varphi\left(\frac{x}{t}\right)x^n\,dx;$$

d'où

$$\alpha_n b_n = \int_0^1 \int_0^\infty \frac{1}{t} f(t)\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)x^n\,dx\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_n b_n = \int_0^\infty G(x)\,x^n\,dx,$$

avec

$$G(x) = \int_x^1 \frac{1}{t} f(t)\,\varphi\left(\frac{x}{t}\right)dt$$

L'interversion des signes $\int$ est ici légitime, à cause de l'inégalité que φ vérifie, si l'on a

$$\int_0^1 |f(t)|\,dt < N,$$

N étant une constante positive assignable. On peut alors écrire

$$|G(x)| < M \int_0^1 |f(t)| \frac{1}{t} e^{-\frac{hx}{2t}} e^{-\frac{hx}{2t}}\,dt.$$

Or

$$e^{-\frac{hx}{2t}} < e^{-\frac{hx}{2}},$$

pour x positif et t compris entre 0 et 1. D'autre part, dans les mêmes conditions

$$\frac{1}{t} e^{-\frac{hx}{2t}} < \frac{2}{ch\,x};$$

d'où

$$|G(x)| < 2MN \frac{e^{-\frac{hx}{2}}}{ch\,x}.$$

C. Q. F. D.

Finalement, le problème des moments est résolu pour les nombres de la forme

$$\alpha_n = n!\,G(n) \int_0^1 f(t)\,t^n\,dt,$$

$G(n)$ *désignant une fonction entière de* n *d'ordre inférieur à* 1 [1].

Je vais généraliser ce résultat en suivant une marche analogue à celle du n° 34.

Soit

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^n\,dx,$$

avec

$$|\varphi(x)| < M e^{-hx}$$

pour $x > 0$. En général, cette formule définira α_n comme fonction analytique de n, *holomorphe dès que la partie réelle de* n *sera supérieure à* -1. Cette remarque explique et justifie les hypothèses que je vais faire.

Soit

$$a(t) = \sum_0^\infty \lambda_p t^p$$

(1) Un raisonnement identique à celui du n° 36 montre que la même conclusion subsiste pour les nombres α_n de la forme $n!\,G(n)\,H\left[\int_0^1 f(t)\,t^n\,dt\right]$, H désignant une fonction entière.

une fonction régulière dans le cercle de rayon 1. Je supposerai tous ses points singuliers situés à gauche de l'axe imaginaire, et même, pour simplifier l'écriture (mais cela n'a rien d'essentiel), je supposerai que le point -1 est son seul point singulier. Cela posé, je prends

$$a_n = a(n).$$

La méthode de sommation exponentielle donnée par M. Borel conduit à la formule

$$a_n = \int_0^\infty e^{-a} G(an)\,da,$$

où l'on a posé

$$G(an) = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p a^p n^p}{p!}.$$

Cette formule est valable dans toute la région du plan située du même côté que l'origine par rapport à la parallèle à l'axe imaginaire menée par le point -1, en tout cas dans une région contenant toute la partie positive de l'axe réel du plan n.

On peut écrire

$$G(an) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{x}\, a\left(\frac{1}{x}\right) e^{nax}\,dx,$$

C étant un contour fermé qui entoure le point $x = 0$ et qui est assez grand pour enfermer toutes les singularités de $a\left(\frac{1}{x}\right)$. On prendra, si l'on veut, pour C un cercle de rayon supérieur à 1. Rien n'empêche d'ailleurs de déformer ensuite ce contour, pourvu que, dans sa déformation, il n'arrive jamais à rencontrer le point -1.

Soit λ un nombre compris entre 0 et 1. Choisissons le contour C de la façon suivante : 1° un cercle C_1 de rayon $\frac{\lambda\pi}{2a}$ décrit de O comme centre ; 2° un cercle C_2 de même rayon décrit du point -1 comme centre ; 3° une portion L de l'axe réel pour relier les deux cercles : le chemin d'intégration est ainsi une sorte de double lacet [1]. Quant à a, c'est un nombre positif quelconque susceptible de varier de 0 à $+\infty$.

Tant que x reste sur C, la partie réelle de e^{-ax} est positive, car l'argument de cette quantité a pour valeur 0 sur la portion considérée de l'axe réel et $\frac{\lambda\pi}{2}\sin\varphi$ (φ allant de 0 à 2π) sur chacun des deux cercles : dans les deux cas, cet argument

[1] Pour les petites valeurs de a, on suppose, en outre, $\lambda < \frac{a}{\pi}$, afin que C_1 et C_2 restent extérieurs l'un à l'autre.

reste moindre en valeur absolue que $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$(1) \qquad n!\, e^{nax} = e^{-ax} \int_0^\infty e^{-ye^{-ax}} y^n\, dy;$$

d'où

$$(2) \qquad n!\, G(an) = \int_0^\infty \psi(a, y)\, y^n\, dy$$

avec

$$\psi(a, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{1}{x}\, a\left(\frac{1}{x}\right) e^{-ax} e^{-ye^{-ax}}\, dx;$$

il vient alors

$$(3) \qquad n!\, a_n = \int_0^\infty \varphi(y)\, y^n\, dy,$$

si l'on pose

$$\varphi(y) = \int_0^\infty e^{-a} \psi(a, y)\, dy.$$

Le problème des moments est ainsi résolu pour les nombres de la forme

$$\alpha_n = n!\, a_n,$$

mais il faut discuter la solution obtenue.

Donnons à a une valeur positive quelconque. Le contour C est dès lors fixé et la formule (1) a toujours lieu.

Il faut maintenant étudier $\psi(a, y)$. Dans ce but, appelons $\theta(a)$ le maximum du module de $\frac{1}{x}\, a\left(\frac{1}{x}\right)$ quand x décrit le contour C.

Je distinguerai les trois parties C_1, C_2 et L de C. Soient respectivement ψ_1, ψ_2, ψ_3 et φ_1, φ_2, φ_3 les fonctions analogues à ψ et φ qu'on en déduit. On a

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

Cherchons des limites supérieures du module de ces six fonctions.

Sur C_1, on a

$$|e^{-ax} e^{-ye^{-ax}}| \leq e^{\lambda\pi} e^{-y\cdots};$$

d'où

$$|\psi_1| \leq A e^{-y\cdots} \theta(a).$$

A désignant une certaine constante.

Sur C_2, on a

$$|e^{-ax}e^{-y(e^{-ax})}| \leq e^{a}e^{\frac{\lambda\pi}{2}}e^{-y(e^{a})^{\frac{\lambda\pi}{2}}};$$

d'où

$$|\psi_2| \leq Be^{a}e^{-y(e^{a})^{\frac{\lambda\pi}{2}}}\theta(a),$$

B désignant une deuxième constante.

Enfin, sur L, on a

$$0 \leq e^{-ax}e^{-y(e^{-ax})} \leq e^{a};$$

d'où

$$|\psi_3| \leq Ce^{a}\theta(a)e^{-y(e^{\frac{\lambda\pi}{2}})},$$

C désignant une dernière constante.

On voit déjà que la formule (2) a lieu pour toute valeur positive de a.

Examinons maintenant la formule (3) et, pour cela, considérons l'intégrale qui donne φ.

Supposons que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-a}\theta(a)\,da$$

ait un sens. Alors φ_1 existe ainsi que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_1(y)\,y^n\,dy$$

pour toute valeur positive de n.

Cela étant, on a

$$|\varphi_2| \leq B\int_0^{+\infty} e^{-y(e^{a})^{\frac{\lambda\pi}{2}}}\theta(a)\,da.$$

Pour $y > 0$, cette intégrale a sûrement un sens, à cause de l'hypothèse faite sur $\theta(a)$: donc $\varphi_2(y)$ existe. Mais on peut assigner une limite supérieure D à $e^{-a}\theta(a)$ quand a est positif; d'où

$$|\varphi_2| \leq BD\int_0^{+\infty} e^{a-y(e^{a})^{\frac{\lambda\pi}{2}}}\,da.$$

Faisons le changement de variable

$$e^{a} = b;$$

il vient

$$|\varphi_2| \leq BD\int_1^{+\infty} e^{-by(e^{\frac{\lambda\pi}{2}})}\,db,$$

c'est-à-dire

$$|\varphi_2| < \mathrm{BD}\, e^{\frac{\lambda\pi}{2}} \frac{e^{-ye^{\frac{\lambda\pi}{2}}}}{y}.$$

Donc les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi_2(y)\, y^n\, dy$$

ont un sens à partir de $n = 1$.

Enfin

$$|\psi_3| < \frac{\delta(a)}{\pi} \int_{\frac{\lambda\pi}{2a}}^{1-\frac{\lambda\pi}{2a}} e^{at - ye^{at}}\, dt.$$

Posons

$$e^{at} = \tau;$$

il vient

$$|\psi_3| < \frac{\delta(a)}{\pi a} \int_{e^{\frac{\lambda\pi}{2}}}^{e^{a-\frac{\lambda\pi}{2}}} e^{-y\tau}\, d\tau,$$

c'est-à-dire

$$|\psi_3| < \frac{\delta(a)}{\pi a} e^{-ye^{\frac{\lambda\pi}{2}}} \frac{1}{y}.$$

En utilisant cette limite supérieure de $|\psi_3|$, ainsi que celle qui a été obtenue plus haut, l'une pour les grandes valeurs et l'autre pour les petites valeurs de a, on voit que φ_3 existe. On a même

$$|\varphi_3| < \mathrm{E}\, e^{-ye^{\frac{\lambda\pi}{2}}} \left(1 + \frac{1}{y}\right),$$

E désignant une constante. Donc les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi_3(y)\, y^n\, dy$$

ont un sens à partir de $n = 1$.

En définitive, on voit que le problème des moments se trouve résolu avec une entière rigueur.

La seule condition, outre celles qui concernent la nature analytique de a_n regardé comme fonction de son indice, est que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\, \delta(a)\, da$$

ait un sens [1].

---

[1] Inutile de faire remarquer que, si $a(t)$ est une fonction entière, le contour C se réduit à la partie C_1.

Si elle est remplie [1], on peut écrire

$$\alpha_n = n!\, a_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx,$$

$\varphi(x)$ étant pour $x = +\infty$ de l'ordre de grandeur d'une exponentielle telle que e^{-hx} ($h = \text{const.} > 0$).

Finalement, nous savons résoudre le problème des moments pour tous les nombres de la forme

$$n!\, a_n,$$

a_n étant le coefficient général d'un développement taylorien étudiable par l'un des procédés du Chapitre IV.

Je n'insisterai pas sur quelques généralisations évidentes qu'on obtient soit en formant une combinaison linéaire de formules telles que (4), soit en faisant dans celle-ci une substitution $x = \xi x'$, ξ étant une constante. Mais je vais montrer que, si la formule (4) s'applique aux nombres α_n et β_n, le problème des moments peut encore être résolu pour les nombres $\alpha_n \beta_n$. Cela nous permettra d'atteindre tous les nombres de la forme

$$(n!)^2 a_n,$$

a_n ayant les mêmes caractères que ci-dessus.

Posons, en effet,

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx, \qquad |\varphi(x)| < \mathrm{M}\, e^{-hx},$$

$$\beta_n = \int_0^\infty \psi(y)\, y^n\, dy, \qquad |\psi(y)| < \mathrm{M}' e^{-hy};$$

on a

$$\alpha_n y^n = \frac{1}{y} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{x}{y}\right) x^n\, dx;$$

d'où

$$\alpha_n \beta_n = \int_0^\infty \mathrm{G}(x)\, x^n\, dx,$$

avec

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \psi(y)\, \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dy.$$

La discussion est bien aisée. On peut écrire, en effet,

$$|\mathrm{G}(x)| < \mathrm{MM}' \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-hy} e^{-\frac{x}{y}}\, dy.$$

---

[1] On peut prendre, par exemple, $a_n = e^{\frac{n}{\sqrt{n+1}}}$.

Posons

$$h'y = z.$$

Il vient

$$|G(x)| < MM' \int_0^\infty \frac{1}{z} e^{-z} e^{-\frac{hh'x}{z}} dz;$$

or

$$\frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\frac{hh'x}{2z}} < \frac{1}{\sqrt{chh'x}}$$

quand z varie de 0 à $+\infty$; d'où

$$|G(x)| < \frac{MM'}{\sqrt{chh'x}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z-\frac{hh'x}{2z}} dz.$$

Mais

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-z-\frac{hh'x}{2z}} dz = \sqrt{\pi}\, e^{-\sqrt{2hh'x}},$$

par suite,

$$|G(x)| < MM' \sqrt{\frac{\pi}{chh'x}}\, e^{-\sqrt{2hh'x}},$$

ce qui justifie nos calculs.

On a ainsi, pour le problème des moments, un théorème analogue au théorème de M. Hadamard, étudié dans le Chapitre V.

Remarquons que, dans tous les cas signalés, la fonction $\varphi(x)$, qui résout le problème des moments, est comparable pour $x = +\infty$ à une exponentielle de l'un des types e^{-x} ou $e^{-\sqrt{x}}$. C'est donc toujours une des fonctions appelées par M. Borel [1] *fonctions de Stieltjes*.

On a alors les résultats suivants :

1° Il n'y a pas deux fonctions de même espèce donnant lieu aux mêmes égalités

$$\alpha_n = \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx;$$

2° La série toujours divergente

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n \alpha_n}{z^{n+1}}$$

est une *série de Stieltjes*. De pareilles séries conduisent à des fonctions bien déterminées

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{z-x} dx,$$

[1] *Mémoire sur les séries divergentes*, IIIe Partie, § V (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1899).

holomorphes dans tout le plan, sauf peut-être sur la partie négative de l'axe réel.

3° Chacune de ces séries est la différence de deux fractions continues convergentes du type étudié par Stieltjes.

4° La somme, la différence, le produit de deux de ces séries est encore une série de même espèce.

5° Une de ces séries n'est identiquement nulle que si la fonction correspondante l'est elle-même, et il suffit que la série vérifie *formellement* une équation différentielle algébrique pour que la fonction qui lui est associée soit une intégrale de cette équation.

M. Borel, qui a démontré ces théorèmes, écrivait à ce propos : « Malheureusement, sauf dans le cas très particulier que Stieltjes a traité à l'aide des fractions continues, nous ne pouvons indiquer aucune méthode précise pour reconnaître si une série donnée est une série de Stieljes [1] ». On voit que les résultats obtenus dans le présent Chapitre permettent de combler cette lacune dans un cas assez étendu.

Je ne doute pas d'ailleurs qu'on ne puisse généraliser beaucoup ces résultats. Mais je me contenterai d'avoir cité quelques exemples nets, et, sans plus insister, je terminerai par quelques remarques.

17. *Le problème des moments est lié très étroitement au problème de la représentation d'une série de Taylor par une intégrale prise entre* 0 *et* $+\infty$.

Soit

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

avec

$$\alpha_n = g_n \int_0^{+\infty} F(x)\, x^n\, dx,$$

g_n étant le coefficient général du développement d'une fonction entière G. On a

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(x)\, G(zx)\, dx.$$

Une discussion facile permettra souvent de déduire de là les propriétés de $f(z)$ dans une région du plan plus étendue que le cercle de convergence.

Pour faire la discussion, en notant par G' la dérivée de G, on devra d'abord

[1] *Loc. cit.*, p. 122.

établir que les intégrales

$$\int_0^\infty |F(x)|\,|G(zx)|\,dx, \qquad \int_0^\infty |F(x)|\,|G'(zx)|\,x\,dx$$

ont chacune un sens, et convergent uniformément tant que z reste dans un certain domaine T qui contient l'origine; puis, il faudra s'assurer que l'intégrale $f(z)$ est développable autour de o en série entière. Ces points élucidés, on aura défini dans T une fonction analytique de z prolongeant la série donnée. J'ajoute que la discussion ne soulève d'ordinaire aucune difficulté sérieuse, et c'est pourquoi je n'insiste pas.

On remarquera que le procédé de prolongement dont il vient d'être fait mention ne diffère pas, au fond, sinon par la généralité, de celui que M. Borel a proposé sous le nom de *méthode des séries divergentes sommables* (¹). Lui-même avait signalé quelques-unes des généralisations possibles. Comme il a donné sur ce sujet tous les éclaircissements désirables dans ses remarquables Mémoires, je ne fais que passer.

Voici un exemple. Soit

$$f(z) = \sum_1^\infty \alpha_n z^n$$

avec

$$\alpha_n = \sum_1^\infty \frac{w^p}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^n} \cdots |w| < 1.$$

C'est une série possédant une infinité de pôles simples aux environs de $z = 1$, semblable à celle que M. Poincaré signale au Tome II de ses *Méthodes nouvelles en Mécanique céleste* (²), sauf qu'elle a un cercle de convergence. On a

$$\alpha_n = \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,dx;$$

d'où

$$f(z) = \sum_1^\infty \alpha_n z^n = z \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}} e^{zx}\,dx.$$

L'intégrale n'a de sens que si la partie réelle de z est inférieure à 1. Dans ce cas,

(¹) *Journal de Mathématiques*; 1896, et *Annales de l'École Normale*, 1899. M. Borel prend systématiquement $F(x) = e^{-x}$.

(²) Page 3. On a ici $f(z) = z \sum_1^\infty \frac{w^p}{1 + \frac{1}{p} - z}$.

d'ailleurs, il est visible que l'intégrale $f(z)$ fournit la somme de la série $\sum_1^\infty \alpha_n z^n$. On voit que cette série définit donc une fonction holomorphe dans la région du plan située à gauche de la parallèle à l'axe imaginaire ayant $+1$ pour abscisse.

Une relation, établie plus haut à propos de $\sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}}$, permet d'étendre ces conclusions au cas où w a une valeur quelconque réelle ou imaginaire : on a le moyen d'étudier $f(z)$ comme fonction de z et w à la fois. En effet,

$$\sum_1^\infty w^p e^{-\frac{x}{p}} = w \int_0^1 J_0\left(2\sqrt{x \mathrm{L}\frac{1}{y}}\right) \frac{dy}{(1-wy)^2}.$$

Alors, par changement de l'ordre des intégrations,

$$f(z) = \frac{wz}{1-z} \int_0^1 \frac{1}{(1-wy)^2} y^{\frac{1}{1-z}} dy,$$

en remarquant que

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{zx} J_0\left(2\sqrt{x \mathrm{L}\frac{1}{y}}\right) dx = y^{\frac{1}{1-z}} \frac{1}{1-z}.$$

Soit maintenant

$$\mathrm{L}\frac{1}{y} = t;$$

il vient

$$f(z) = \frac{wz}{1-z} \int_0^\infty \frac{e^t}{(e^t - w)^2} e^{-\frac{t}{1-z}} dt.$$

Regardons $f(z)$ comme une fonction de w : *ses points critiques restent fixes quand z varie, $f(z)$ est d'ailleurs holomorphe dans tout le plan (w), sauf pour $w = 1$ et $w = \infty$, et elle n'est pas uniforme.* Regardons ensuite $f(z)$ comme une fonction de z : *elle est holomorphe dans la région du plan (z) où la partie réelle de $1 + \frac{1}{1-z}$ est positive, cette région est d'ailleurs formée par l'ensemble des points du plan (z) extérieurs au cercle décrit sur le segment $(1, \infty)$ comme diamètre.* Tous les points singuliers de $f(z)$ sont donc contenus, quel que soit w, à l'intérieur de ce cercle. En changeant le chemin d'intégration par la formule

$$t = \rho e^{i\omega}, \qquad |\omega| \leq \frac{\pi}{2},$$

φ devenant la nouvelle variable d'intégration et ω restant fixe, si l'on pose

$$z = \alpha + i\beta,$$

on trouve comme coupure

$$\alpha^2 + \beta^2 - 3\alpha - \beta \tang\omega + 2 = 0,$$

c'est-à-dire un cercle *quelconque* passant par les points 1 et 2 du plan (z). On voit ainsi que les points singuliers de $f(z)$ sont distribués le long de ce segment $(1, 2)$.

On se rend compte, par cet exemple si simple, de la manière dont on peut varier l'emploi de nos méthodes et dont on arrive à faire l'étude complète d'une fonction donnée autour de l'origine par une série de Taylor.

48. Les procédés d'étude qui viennent d'être exposés sont susceptibles de mille variations.

Pour ne citer qu'un exemple, remarquons qu'il serait facile de trouver les conditions de développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les polynomes P_n : on pourrait utiliser, pour cela, les remarques données par M. Darboux dans son Mémoire *Sur les fonctions de grands nombres*, à propos des séries ordonnées suivant des polynomes qui forment une suite de Sturm.

Sans m'appesantir là-dessus, je ferai seulement remarquer que, si l'on a

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty \lambda_n P_n(x),$$

il vient, en vertu des formules (1) et (2),

$$\lambda_n (n!)^2 = \int_0^\infty e^{-x} \varphi(x) P_n(x)\, dx;$$

d'où la détermination des coefficients du développement de $\varphi(x)$, lorsque celui-ci est possible.

Soit donc

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n.$$

Posons

$$\lambda_n = \frac{\alpha_n}{n!}, \qquad G(y) = \sum_0^\infty \lambda_n y^n;$$

on a

$$\sum_0^\infty \lambda_n D_n = \varphi(x) = \int_0^\infty e^{-y} G(y) J_0(2\sqrt{xy})\, dy;$$

d'où

$$\alpha_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{P_n(x)}{n!} dx$$

et, par suite,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{\frac{xz}{1-z}} dx.$$

Si $\varphi(x)$ est pour x positif et très grand comparable à e^{-ax}, on voit en posant $z = \alpha + i\beta$ que $f(z)$ est holomorphe pour

$$(1-a)(\alpha^2 + \beta^2) - (1-2a)\alpha - a < 0.$$

Quelle est la coupure? Pour $a = \frac{1}{2}$, on a le cercle de rayon 1, qui est le cercle de convergence. Pour $a = 1$, on a la droite $\alpha = 1$. Pour $\frac{1}{2} < a < 1$, on a un cercle tangent en 1 au cercle de convergence et contenant celui-ci à son intérieur. Pour $a > 1$, on a un cercle tangent en 1 au cercle de convergence et extérieur à celui-ci. Une discussion aisée fait trouver dans ces divers cas des propriétés importantes de $f(z)$: on est ramené à la discussion de $\varphi(x)$ pour les grandes valeurs positives de x.

On aura sans peine des généralisations de cette méthode, toutes les fois qu'on pourra poser

$$\alpha_n = \int \varphi(x) A_n(x) dx,$$

et qu'on connaîtra la fonction génératrice des A_n.

49. Toutes les remarques précédentes peuvent être étendues au cas où l'on cherche à réaliser les égalités

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x^n dx,$$

à quoi l'on parvient à l'aide des polynomes de M. Hermite.

J'en puis dire autant du cas où les limites de l'intégrale sont finies, ce qui nous ramène à notre point de départ.

Soit, par exemple,

$$\alpha_n = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) x^n dx.$$

Cherchons à résoudre ces égalités par rapport à φ, les α_n étant donnés.

Posons

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} \lambda_p A_p,$$

les X_p étant les polynomes de Legendre. Il vient

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2} X_n(\alpha),$$

$X_n(\alpha)$ désignant ce que devient $X_n(x)$ quand on y remplace x^p par α_p. On est alors ramené à discuter la convergence de la série $\sum_0^\infty (2n+1) X_n(\alpha) X_n(x)$.

Si cette série est absolument et uniformément convergente pour $-1 \leq x \leq 1$ (¹), $f(z)$ est holomorphe en tout point du plan, sauf si z est réel et plus grand que 1 en valeur absolue. Si même la série en question définit une fonction de x holomorphe au voisinage du segment $(-1, +1)$, $f(z)$ n'a pas d'autres points singuliers à distance finie que -1 et $+1$, mais alors cette fonction n'est pas uniforme.

Si, par exemple, les α_n sont donnés par les équations linéaires

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2} X_n(\alpha) = \frac{1}{n!},$$

aisées à résoudre de proche en proche, il vient

$$\varphi(x) = e^x J_0(\sqrt{1-x^2}),$$

en tenant compte de la relation

$$X_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \cos\varphi)^n \, d\varphi,$$

qui donne

$$\sum_0^\infty \lambda_n X_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^x e^{t\sqrt{1-x^2}\cos\varphi} \, d\varphi.$$

On aurait d'ailleurs des généralisations immédiates en considérant, non plus les polynomes de Legendre, mais les polynomes hypergéométriques généraux.

VII. — Applications diverses.

50. Je ne puis songer à énumérer toutes les applications que l'on peut faire des méthodes précédentes. J'en citerai seulement quelques-unes, se rapportant encore

(¹) Il suffit que la série en question définisse une fonction $\varphi(x)$ telle que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |\varphi(x)| \, dx$ ait un sens.

(pour rester dans le même ordre d'idées) à l'étude des fonctions définies par certaines séries.

Tout d'abord, il est clair que notre méthode n'est au fond qu'un procédé de sommation des séries. La transformation d'une série en une intégrale, suivant les modes indiqués plus haut, est parfois très avantageuse au point de vue du calcul numérique, comme l'a montré M. A. Janet [1] sur un exemple auquel je me contenterai de renvoyer le lecteur.

Cette remarque trouve une application immédiate dans la théorie des *fonctions entières,* c'est-à-dire des fonctions holomorphes en tout point du plan.

Soit, par exemple,

$$G(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}};$$

on a

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{\left(x \mathrm{L}\frac{1}{x}\right)^n}{n!}\, dx;$$

d'où

$$G(z) = \int_0^1 e^{zx\mathrm{L}\frac{1}{x}}\, dx.$$

Cette nouvelle expression fournit plusieurs renseignements sur $G(z)$: on voit, par exemple, que l'équation

$$G(z) = 0$$

n'a pas de racines réelles, que l'on a

$$G(z) < e^{\frac{z}{e}}$$

pour $z > 0$, que $G(z)$ tend vers zéro quand z devient infiniment grand et négatif, etc.

Posons, en général,

$$G(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)} a^n z^n,$$

a désignant une constante quelconque et p un entier positif. Supposons que l'on ait

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x)\, x^n\, dx.$$

Soit ω une racine primitive de l'équation binome

$$y^p = 1;$$

---

(1) A. Janet, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1894.

il vient

$$G(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{\sum_0^{p-1} e^{\omega^q (azx)^{\frac{1}{p}}}}{p} dx.$$

On peut alors assez généralement, en suivant une marche exposée par M. Poincaré dans sa *Théorie analytique de la chaleur* (¹), trouver la valeur asymptotique de $G(z)$ ou tout au moins des inégalités asymptotiques auxquelles $G(z)$ obéit.

Signalons encore un cas simple, qu'on généraliserait d'ailleurs aisément. On a l'identité

$$e^{-x} G(x) = e^{-x} \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \sum_0^\infty \frac{\Delta^{(n)} \alpha_0}{n!} x^n.$$

Si $\alpha_n = n^p$ (p entier positif), on voit que $G(x)$ est le produit de e^x par un polynome de degré p en x. Si α_n est une fonction entière de n d'ordre inférieur à 1, $G(x)$ est le produit de e^x par une fonction entière de x d'ordre inférieur à 1.

En résumé, si α_n est de l'une des formes examinées au Chapitre IV, la méthode de sommation exposée dans ce Mémoire peut apporter une utile contribution à l'étude des fonctions entières de la forme

$$G(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)} z^n$$

autour de leur point essentiel à l'infini.

Je n'insisterai pas davantage. Mais je vais montrer maintenant que l'emploi de cette même méthode ne nous confine pas nécessairement dans la théorie des séries de Taylor.

51. *Une fonction représentée par une série trigonométrique est-elle ou non analytique?* Une réponse peut être donnée à cette question dans des cas étendus.

Soit, pour fixer les idées,

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n \cos nz,$$

avec

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx;$$

(¹) Carré; Paris, 1895. — *Voir* le Chapitre XII.

il vient

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{1 - x\cos z}{1 - 2x\cos z + x^2} dx.$$

Les coupures sont

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

c'est-à-dire

$$z = 2k\pi \pm i\mathrm{L}\frac{1}{x}.$$

Comme x varie de 0 à 1 en restant réel, ces coupures sont les parallèles à l'axe imaginaire du plan (z) menées par les points de l'axe réel d'abscisses $2k\pi$. On voit donc que *$f(z)$ est une fonction périodique de z holomorphe dans chacune des bandes ainsi délimitées.*

Des résultats semblables peuvent être obtenus pour des séries autres que les séries trigonométriques, dès que l'on connaît la fonction génératrice des fonctions suivant lesquelles procèdent ces séries [1].

Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n X_n(z),$$

les lettres X_n désignant les polynomes de Legendre, dont la fonction génératrice est

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + x^2}} = \sum_0^\infty x^n X_n(z).$$

Si l'on a

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx,$$

il viendra

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - 2zx + x^2}} dx.$$

La coupure est

$$z = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

x variant de 0 à 1 par valeurs réelles. C'est la portion $(+1, +\infty)$ de l'axe réel du plan (z). On voit que *$f(z)$ est holomorphe en tout point, sauf peut-être pour z réel et supérieur à* 1. La discussion peut d'ailleurs être poussée plus loin, comme il a été déjà dit; et, d'autre part, l'intégrale qui exprime $f(z)$ est bien développable pour $-1 < z < +1$ suivant la série donnée.

---

[1] En particulier, la méthode s'applique aux séries de la forme $\sum_0^\infty \alpha_n [\varphi(z)]^n$.

Soit encore

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{n!} P_n(z),$$

les lettres P_n désignant les polynomes déjà considérés, définis par la fonction génératrice

$$\frac{e^{\frac{zx}{1-x}}}{1+x} = \sum_0^\infty \frac{P_n(z)}{n!} x^n.$$

On a, cette fois,

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) \frac{e^{\frac{zx}{1-x}}}{1+x} dx,$$

et l'on voit que $f(z)$ est une fonction entière de z.

La même conclusion est vraie pour les polynomes de M. Hermite donnés par l'égalité

$$e^{-x^2-2zx} = \sum_0^\infty \frac{U_n(z)}{n!} x^n.$$

On pourrait multiplier ces exemples.

A propos de toutes ces questions, on aurait des théorèmes précis en se reportant aux conditions suffisantes trouvées plus haut pour que

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(x) x^n dx.$$

Des propositions analogues subsistent d'ailleurs évidemment si α_n, sans être de cette forme, peut être mis sous quelqu'une des autres formes de même espèce que nous avons examinées. J'ajoute enfin que ces divers procédés peuvent servir pour attribuer à des séries divergentes un sens bien défini, particulièrement pour construire, à l'aide de la méthode de sommation de M. Borel, des fonctions génératrices irrégulières à l'origine, comme il a été fait à propos des polynomes P_n. Mais c'est là un point qui demande un examen spécial.

VIII. — Applications à la théorie des séries divergentes.

32. Les considérations développées dans les pages précédentes sont en relation étroite avec le *problème des séries divergentes*. C'est ce que je vais expliquer. Mais, pour cela, je dois commencer par poser nettement la question.

Étant donnée une fonction analytique, que nous supposerons *uniforme* pour plus de simplicité, l'un des objets importants de la Théorie des fonctions est d'en

construire une représentation analytique au moyen d'une expression tellement choisie qu'elle explicite, autant qu'il est possible, les diverses particularités de la fonction qui lui correspond. Si l'on veut une représentation parfaite, il faut que l'expression trouvée soit aisément maniable dans le calcul; il faut, en outre, qu'elle soit unique pour une fonction donnée; il faut enfin qu'elle puisse servir à définir la fonction envisagée dans tout le domaine où celle-ci existe. D'autre part, comme les fonctions interviennent surtout en Analyse par leurs singularités, ces dernières doivent être mises en évidence dans l'expression considérée. Or, si l'on en reste aux notions élémentaires de convergence et de limite, le problème de la représentation analytique des fonctions n'est pas complètement résolu. En effet, on en a bien proposé plusieurs solutions; mais, parmi ces solutions, les unes (comme celle de Taylor au moyen d'une série entière, ou celle de Cauchy à l'aide d'une intégrale définie) présentent le double inconvénient de ne pas manifester les propriétés de la fonction représentée et de n'être valables que dans une partie du domaine naturel d'existence de cette fonction; et les autres (séries de fractions rationnelles de MM. Runge et Painlevé ou séries de polynomes de M. Mittag-Leffler), outre qu'elles sont d'un calcul difficile, ne sont pas déterminées sans ambiguïté quand la fonction est donnée, en sorte qu'elles peuvent représenter zéro sans être identiquement nulles. En se résignant à des restrictions sur la nature des fonctions étudiées, on peut, il est vrai, parvenir à des solutions meilleures (par exemple, la solution de M. Mittag-Leffler pour les fonctions uniformes n'ayant qu'une infinité dénombrable de singularités); mais, au défaut de n'être pas facilement maniables dans les calculs, ces solutions joignent celui de ne se rapporter qu'à des fonctions d'un certain type. Que faut-il donc faire? Devons-nous entreprendre la recherche de nouveaux modes d'expression des fonctions? Ne serait-il pas plus conforme aux principes ordinairement suivis dans le développement de l'Analyse de s'ingénier à tirer parti des représentations déjà connues, en élargissant au besoin les définitions sur lesquelles elles reposent? Quelques observations vont nous fixer à cet égard.

La série de Taylor, si simple, si facile à obtenir et si connue depuis tant d'années qu'elle s'est imposée, présente des avantages indiscutables pour la représentation des fonctions :

1° Elle s'est introduite d'elle-même comme un élément essentiel de l'Analyse; elle apparaît comme un *fait* inévitable, et, d'ailleurs, elle est très aisément maniable dans le calcul, notamment aux points de vue de l'intégration et de la dérivation;

2° Elle est unique pour une fonction donnée, en sorte qu'elle ne peut représenter zéro sans être identiquement nulle;

3° Elle peut servir à définir des fonctions quelconques, uniformes ou non uniformes;

4° Bien qu'elle ne converge qu'à l'intérieur d'un certain cercle, elle *caractérise* la fonction qui lui correspond (notion du prolongement analytique, d'après Weierstrass) et fournit le moyen, au moins théorique, d'atteindre cette fonction dans tout son domaine d'existence à l'aide d'un ensemble dénombrable d'opérations régulièrement classées (remarques de M. Poincaré sur les fonctions non uniformes générales); elle *signifie* donc quelque chose, même quand elle diverge.

Son seul défaut est donc de diverger en des points où la fonction qu'elle représente existe encore et, à cause de cela, de ne pas mettre en évidence les singularités de cette fonction. Si l'on parvient à étendre la notion de *représentation taylorienne* jusqu'à la débarrasser de la double restriction que je viens de citer, on aura complètement résolu le problème que nous avons posé. Cela conduit à voir ce que l'on peut faire des développements tayloriens divergents, pour lesquels les notions élémentaires ne donnent plus rien, mais qui n'en remplissent pas moins *formellement* le même rôle que les séries de Taylor convergentes.

La marche que nous suivrons consistera donc à généraliser les notions élémentaires concernant les séries, de façon que nous en arrivions à faire usage de celles-ci, même quand elles ne convergent plus, en sauvegardant toutefois le principe de la permanence des formes opératoires [1], *comme on a fait dans la Théorie des équations algébriques en inventant les racines imaginaires.* C'est ainsi que se pose le *problème des séries divergentes.*

53. Il importe de se rendre compte, par avance, des difficultés que l'on rencontrera.

Étant donnée une série numérique convergente ou non,

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots,$$

on devra lui donner un sens arithmétique au moyen de conventions telles que la valeur qu'on lui attachera soit celle que prend pour $z = 1$ la fonction définie par la série entière

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n + \ldots,$$

à supposer que cette série soit convergente dans un certain cercle décrit de $z = 0$ comme centre. Plusieurs conséquences découlent de là.

D'abord nos conventions devront tomber en défaut lorsque la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ aura son cercle de convergence comme coupure (du moins, tant que nous n'aurons pas généralisé la notion de prolongement analytique). On sait que c'est le cas général, si l'on part d'une série arbitrairement donnée. Mais, dans la pratique,

---

[1] HANKEL, *Vorlesungen über complexe Zahlen.*

les séries que l'on rencontrera seront liées à des fonctions analytiques générales, c'est-à-dire engendrées par elles et non posées *a priori;* or, les fonctions intervenant surtout par leurs points singuliers, il faut regarder comme général le cas où la distribution de ceux-ci est quelconque; alors la série de Taylor correspondante aura sur son cercle de convergence *un point singulier au moins et trois au plus;* le prolongement sera possible. Nos conventions seront donc valables pour la plupart des cas usuels.

D'autres difficultés paraissent plus sérieuses. On voit sans peine que les conventions à faire doivent être telles qu'une série à termes tous positifs puisse avoir pour somme (quand elle est divergente) un nombre négatif ou même imaginaire. Il peut même se produire des circonstances (à cause de la non-uniformité des fonctions) où notre série devra avoir plusieurs sommes suivant le chemin suivi par z pour arriver au point 1 ([1]). En un mot, dès que l'on abandonne les notions classiques de convergence, il est forcé que l'on rencontre des *périodes* pour les séries comme on en a trouvé pour les intégrales.

54. En parlant du problème des séries divergentes entendu comme je viens de le dire, je me trouve amené à signaler un autre problème connexe dont j'aurai aussi à m'occuper.

Existe-t-il des raisons permettant d'attribuer un sens à certaines séries de Taylor dont le rayon de convergence est nul et, si oui, quelle fonction faut-il attacher à une pareille série de Taylor?

On sait que l'on rencontre souvent, au moyen de développements ordonnés suivant les puissances d'une variable, des solutions *formelles* de certaines équations différentielles : *on verra que, dans des cas très étendus, ces solutions formelles définissent des solutions effectives.*

55. M. Borel ([2]) est le premier qui ait abordé méthodiquement, du moins pour le cas général, l'examen du problème dont je viens de rappeler l'énoncé. Avant lui, Stieltjes s'en était déjà occupé, mais seulement pour les séries développables en fractions continues convergentes d'un certain type. Après lui, MM. Leau ([3]) et Servant ([4]) ont examiné les mêmes questions, sans apporter toutefois un principe de solution nouveau. Je terminerai ce court *Historique* par une seule re-

---

([1]) *Exemples :* $L\frac{1}{1-z} = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$ (pour $z = -1$, $z = +2$) et $\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty z^n$ (pour $z = 2$).

([2]) E. Borel, *Journal de Mathématiques*, 1896, et *Annales de l'École Normale*, 1899.

([3]) Leau, *Comptes rendus*, 1898.

([4]) Servant, *Comptes rendus*, 1899.

marque : Cauchy fut le premier à faire comprendre la nécessité des discussions de convergence et le premier aussi à montrer (notamment à propos de la célèbre série de Stirling) qu'on pouvait tirer légitimement parti des séries, même lorsqu'elles étaient divergentes. On connaît enfin les travaux de M. Poincaré sur les séries asymptotiques dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Sans parler des généralisations possibles (indiquées d'ailleurs par l'auteur lui-même), la méthode de M. Borel consiste à faire correspondre à la série numérique $\sum_0^\infty \alpha_n$ la série entière $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ et à celle-ci l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a} \sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n a^n}{n!} da.$$

M. Borel montre que la somme ainsi donnée à une série entière coïncide avec la somme ordinaire lorsque la série est convergente. Nous avons eu déjà l'occasion d'utiliser plusieurs fois ce procédé de sommation. Mais il est temps maintenant de présenter quelques observations à son sujet.

Si la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ définit une fonction entière, elle est convergente dans tout le plan (z) et la méthode de sommation de M. Borel ne peut rien donner de plus que la méthode ordinaire.

Si la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ possède un cercle de convergence fini, on est ramené à l'étude de la fonction entière associée

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha_n}{n!} z^n.$$

L'emploi de la méthode de M. Borel a donc pour résultat de dilater le cercle de convergence jusqu'à l'infini. Mais cela ne constitue qu'un déplacement de difficulté, utile seulement dans des cas particuliers (si l'on excepte ceux où l'on parvient ainsi à montrer que la série donnée admet son cercle de convergence comme coupure). En réalité, on a *balayé* toutes les singularités que possède $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ dans le plan et on les a condensées à l'infini : il faut ensuite faire une étude aussi difficile que l'étude du prolongement de la fonction donnée, celle de la fonction entière associée aux environs de son point essentiel à l'infini.

Au contraire, si la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ a un rayon de convergence nul, la méthode de

M. Borel apporte quelque chose de tout nouveau. La fonction associée présente, en effet, alors (au moins dans des cas étendus) un cercle de convergence fini. L'intégrale peut donc définir une fonction analytique bien déterminée que l'on attachera à la série toujours divergente $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$. La question est ramenée à l'étude du prolongement de la fonction associée : on a, en somme, *analysé* les singularités primitivement mêlées en O en les dispersant le long d'un certain cercle, et l'on possède alors, en quelque sorte, le *germe* d'une fonction bien définie.

On voit, pour conclure, que la méthode si intéressante de M. Borel invite à chercher, par d'autres voies, des procédés de prolongement qui permettent de l'appliquer autrement qu'à des exemples tout à fait particuliers. C'est à quoi nous amènent sans peine les méthodes exposées dans les Chapitres précédents.

56. A la série numérique divergente

$$\sum_0^\infty \alpha_n$$

j'attache la série entière

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n.$$

Supposons d'abord que celle-ci ait un rayon de convergence fini. Soit $f(z)$ la fonction qu'elle définit. Admettons, pour fixer les idées, que $f(z)$ existe dans tout le plan et soit holomorphe, sauf en des points singuliers isolés. A la série numérique donnée, je fais correspondre la valeur $f(1)$, unique ou non suivant que $f(z)$ est uniforme ou non, finie ou non suivant que $z = 1$ est ou non un point singulier de $f(z)$ [1]. Cela fait, je dis que la série $\sum_0^\infty \alpha_n$ est *sommable* et que *sa somme est* $f(1)$.

Les méthodes exposées plus haut, permettant de mettre $f(z)$ sous forme d'une intégrale définie et ainsi d'étudier cette fonction dans tout le plan, établissent des *caractères de sommabilité* des séries.

Il est visible que, si la série est convergente, la somme que nous lui attribuons par le procédé que je viens de décrire coïncide avec la somme ordinaire ; la notion de série sommable constitue donc une généralisation légitime de la notion de série convergente.

Les propriétés bien connues du prolongement montrent en outre que, si l'on suit plusieurs procédés de sommation différents pour la même série, on retombe

[1] Il peut se faire que $f(1)$ reste fini bien que $z = 1$ soit un point singulier.

toujours sur la même somme; en effet, une série entière ne définit qu'une seule fonction, comme l'a montré Weierstrass. La somme attachée à une série sommable est donc un véritable *invariant* par rapport aux procédés de calcul qui peuvent la fournir.

Parmi toutes les manières de mettre $f(z)$ sous forme d'intégrale définie, il y a évidemment celle de M. Borel, dont on retrouve ainsi comme cas particulier le procédé de sommation. On peut remarquer que nos méthodes établissent, en somme, des caractères de sommabilité (en prenant ce mot au sens de M. Borel) [1]. Mais il n'y a pas avantage ensuite à recourir au procédé de M. Borel, puisque ces mêmes théorèmes donnent immédiatement le prolongement cherché. En outre, la méthode que je propose offre cette propriété, qui peut être précieuse, de se prêter à des variations innombrables suivant les besoins du calculateur.

Nous arrivons aussi à généraliser l'idée de limite, la quantité α_n ayant une *limite généralisée* si la série $\sum_0^\infty (\alpha_n - \alpha_{n-1})$ est *sommable*.

Les divers procédés de sommation que l'on peut appliquer à la même série conduisent à la même fonction, mais les *régions de sommabilité* peuvent être différentes. Ainsi l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} e^{zx}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y(1-y)}} \frac{dy}{1-zy}.$$

La première intégrale n'est valable que si la partie réelle de z est inférieure à 1, tandis que la seconde est valable pour tout le plan.

On remarquera que l'emploi des intégrales définies étudiées plus haut fournit en général une région de sommabilité aussi grande que possible, ce que ne donne pas directement l'emploi des intégrales à limites infinies telles que celles de M. Borel. En outre, nous arrivons à trouver, à partir d'une série de Taylor, les diverses branches de la fonction envisagée, ainsi que les points singuliers de celle-ci et leur nature. Possédant une expression analytique de $f(z)$ valable pour tout le plan, nous avons aussi le moyen de calculer numériquement cette fonction en tout point où elle est régulière. « Il me reste, disait M. Borel à la fin de son premier *Mémoire sur les séries divergentes* [2], à émettre le vœu de voir la

---

(1) En effet, la fonction entière associée à une fonction étudiable par les méthodes des Chapitres précédents peut être mise, elle aussi, sous forme d'intégrale définie $\left(\text{telle que } \int_0^1 \varphi(x) e^{zx}\, dx\right)$ et l'on sait alors en calculer la valeur asymptotique, en sorte que l'on parvient à discuter l'intégrale de M. Borel.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1896.

notion de somme s'étendre aux séries divergentes dans lesquelles S_n augmente indéfiniment par valeurs de même signe et pour lesquelles notre méthode ne donne aucun résultat. Rien ne prouve qu'il soit impossible de parvenir à ces sommes et de jeter ainsi un jour tout nouveau sur l'étude des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions non uniformes. » C'est pour répondre à ce *desideratum* que j'ai entrepris les présentes recherches; on voit que notre notion de sommabilité s'étend à bien des cas laissés de côté par M. Borel.

Les séries sommables peuvent être maniées dans le calcul comme si elles étaient convergentes, par exemple au point de vue de l'intégration ou de la dérivation terme à terme.

Il faut remarquer qu'une série divergente sommable *numérique* est toujours calculable par un procédé qui ne dépend que de la valeur des termes successifs de la série donnée. Soit, en effet, $\sum_0^\infty \alpha_n$ cette série. Si l'on se reporte au Chapitre II du présent Mémoire, on voit que la somme de notre série est la limite de l'expression

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \alpha_n,$$

lorsque t tend vers 1 par valeurs réelles croissantes. Il n'y a d'exception que si la droite joignant l'origine au point 1 passe par un point singulier de la fonction

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

ce dernier point étant en outre compris entre l'origine et le point 1.

Si α_n est une fonction analytique d'une variable complexe u holomorphe quel que soit n tant que u reste dans un certain domaine T et si l'expression

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \alpha_n(u)$$

tend uniformément vers une limite dans les mêmes conditions, il est clair que cette limite sera une fonction analytique de u holomorphe dans T.

Voici un exemple. Prenons la série trigonométrique

$$\sum_0^\infty \alpha_n e^{inu}$$

et supposons que α_n soit de la forme

$$b_n \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx,$$

$\Delta^{(n)} b_0$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La série en question peut être divergente. Considérons alors la fonction associée

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n e^{inu},$$

convergente pour $|z| < 1$. On a

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x)\, G\left(\frac{1}{1 - zxe^{iu}}\right) dx,$$

G désignant une fonction entière. D'où

$$f(1) = \int_0^1 \varphi(x)\, G\left(\frac{1}{1 - xe^{iu}}\right) dx.$$

On voit donc que :

1° Notre série trigonométrique est sommable;

2° Sa somme est une fonction analytique de u, admettant la période 2π et régulière sur toute parallèle à l'axe imaginaire du plan u dont l'abscisse n'est pas égale à l'un des nombres $2k\pi$ (k entier);

3° Les séries obtenues en dérivant terme à terme la série donnée sont encore sommables et ont pour sommes respectivement les dérivées de la somme de la série primitive.

Bref nous pouvons faire complètement l'étude de la série en question et il en sera de même pour toute série trigonométrique dont les coefficients auront l'une des formes envisagées au Chapitre IV.

57. Passons à l'examen des séries entières dont le rayon de convergence est nul. L'observation des faits analytiques naturels nous apprend qu'en bien des circonstances *une fonction précise doit être regardée, à l'exclusion de toute autre, comme définie par un tel développement*. Un calcul formel quelconque, exécuté sur la série divergente, correspond alors à un calcul semblable portant sur la fonction associée. Les écrits des anciens géomètres abondent en exemples de pareils phénomènes. Mais comment régulariser cet aperçu? La résolution du problème des moments nous a fourni une première méthode basée sur l'emploi de certaines fractions continues. Toutefois il y a lieu d'insister davantage. D'ailleurs, fidèle à l'esprit dans lequel j'ai commencé ce Mémoire, je ne m'occuperai pas d'être complet sur la nouvelle question que j'aborde ainsi : mon but sera surtout de découvrir des cas bien nets que l'on puisse traiter pratiquement.

Soit

$$(1) \qquad \sum_0^\infty \alpha_n z^n$$

un développement taylorien qui n'est convergent que pour $z = 0$. Imaginons que l'on ait mis α_n sous la forme

$$\alpha_n = a_n \int_0^\infty \varphi(x)\, x^n\, dx;$$

la série

$$\sum_0^\infty a_n z^n \tag{2}$$

ayant un cercle de convergence fini et définissant une fonction $F(z)$ qui n'admet pas son cercle de convergence comme coupure. Je pose

$$f(z) = \int_0^\infty \varphi(x)\, F(zx)\, dx \tag{3}$$

et je conviens de dire que *la série divergente* (1) *est sommable et a pour somme la fonction* $f(z)$.

Une discussion s'impose. Je supposerai d'abord $F(z)$ holomorphe à l'intérieur d'un certain angle ayant son sommet au point $z = 0$ et s'étendant jusqu'à l'infini. Je supposerai, en outre, que $F(z)$ se comporte, pour les valeurs de z dont le module est très grand et dont l'argument reste compris entre les deux limites qui définissent l'angle précédent, de telle façon que les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, F^{(p)}(zx)\, x^p\, dx$$

soient absolument et uniformément convergentes, $F^{(p)}$ désignant la dérivée d'ordre p de F et z restant dans l'*angle de régularité* défini plus haut. Si ces conditions sont remplies, on voit aisément que $f(z)$ *est une fonction analytique de* z *holomorphe dans l'angle considéré.*

Remarquons que $f(z)$ admet le point $z = 0$ comme point singulier. En utilisant une expression introduite par M. Borel [1], on dira que $f(z)$ *est une fonction d'espèce* (A). Cela signifie, comme on sait, que les quantités

$$\frac{f^{(p)}(z)}{p!}$$

tendent respectivement vers les coefficients α_p quand z tend vers zéro en suivant un chemin contenu dans l'angle d'holomorphisme.

Un lien manifeste existe entre la méthode que je viens de rappeler et le *problème des moments.* D'autre part, les procédés de prolongement analytique

[1] *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1899).

étudiés au Chapitre IV trouvent ici leur emploi en permettant de reconnaître pour des cas étendus que $F(z)$ satisfait aux conditions prescrites. Il est bon de noter une fois de plus combien sont étroitement connexes ces trois problèmes des *séries divergentes,* du *prolongement analytique* et de l'*inversion des intégrales définies.*

Plusieurs fonctions $f(z)$ correspondent à la même série divergente (1). Cela tient à ce que l'on peut, en général, décomposer de plusieurs façons différentes le coefficient α_n sous la forme indiquée et aussi à ce que le problème des moments n'admet pas une solution *unique.* Bref, il y a des fonctions (A) (¹) pour lesquelles tous les α_n sont nuls. Telle est, par exemple, la fonction

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-\sqrt[4]{x}} \sin\sqrt{x} \frac{dx}{1 - zx}.$$

De semblables fonctions jouent, dans la sommation des séries divergentes, le même rôle que les constantes arbitraires dans une intégration. On pourrait en chercher la forme générale. On pourrait également chercher de quelle manière peuvent être modifiées les fonctions φ et F sans que l'intégrale (3) cesse de représenter la même fonction f. L'intégration par parties et le changement de variable fournirait, à cet égard, des théorèmes simples sur lesquels je n'insisterai pas. En se bornant aux solutions du problème des moments obtenues dans le Chapitre VI, on écarte toutes les fonctions telles que (4). Il ne reste donc que deux questions à examiner : *Peut-on faire un choix entre les diverses fonctions $f(z)$ qui correspondent à une même série* (1)? *Quel rôle sont susceptibles de jouer dans le calcul les fonctions ainsi choisies?*

On a déjà donné deux réponses différentes à la première question. Il faut d'ailleurs remarquer que, si les deux méthodes qui en découlent sont à la fois applicables à une même série (1), elles conduisent à la même fonction $f(z)$.

La *solution de Stieltjes* consiste à poser systématiquement

$$a_n = 1,$$

c'est-à-dire

$$F(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Je ne m'en occuperai plus.

La *solution de M. Borel* consiste, au contraire, à laisser F quelconque, mais à poser

$$\varphi(x) = e^{-x}.$$

C'est cette solution que je vais étudier, en la modifiant un peu.

(¹) J'étends un peu le sens donné par M. Borel à cette locution.

Soit la série

$$\sum_0^\infty \alpha_n z^n,$$

que nous supposerons *complète*, ou du moins préalablement rendue telle par un changement de variable $z' = z^q$ (q entier). Bornons-nous au cas où α_n est de la forme

$$\alpha_n = \Gamma(pn+1)a_n,$$

p désignant un nombre positif et a_n le coefficient général d'une fonction $F(z)$ remplissant les conditions énumérées plus haut [1]. Ce cas est celui que l'on rencontre le plus souvent dans la pratique. Il est clair que, les α_n étant donnés, on ne peut jamais ni les décomposer de deux manières différentes de la façon que je viens de dire, ni les mettre sous la forme voulue pour deux valeurs distinctes de p; cela résulte immédiatement de la considération de la valeur asymptotique de la fonction Γ et de ce fait que $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ doit avoir l'unité pour limite supérieure quand n devient infini.

Cela posé, on a

$$\Gamma(pn+1) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} x^n\, dx;$$

d'où

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx.$$

Nous avons là un *principe de choix* permettant d'associer à la série divergente (1) une fonction $f(z)$ bien déterminée et unique. Pour $p = 1$, on retrouve la *méthode de sommation exponentielle* de M. Borel.

Dans bien des cas, on pourra sommer la série (1) sans faire usage de la marche régulière que je viens de décrire. Il arrivera souvent qu'on obtienne toujours la même somme. Mais ce sera un point à établir directement dans chaque cas.

58. On peut étendre au cas général que nous envisageons les théorèmes démontrés par M. Borel pour $p = 1$: je vais l'indiquer brièvement.

J'introduirai la notion de *série entière d'ordre p* : cela signifiera une série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ pour laquelle α_n sera égal à $\Gamma(pn+1)a_n$, a_n étant le coefficient général d'une série entière dont le rayon de convergence est différent de zéro et de l'infini.

[1] Des généralisations s'offrent d'elles-mêmes : leur étude conduirait à classer (autant que faire se peut) les *types de divergence*.

On établit facilement les propositions suivantes :

1° Une même série ne peut pas être à la fois de deux ordres différents;

2° Une série peut n'être d'aucun ordre assignable;

3° Une série d'ordre o a un cercle de convergence fini;

4° Une série d'ordre négatif définit une fonction entière $\left[\text{pour les séries d'ordre négatif, on pose } \alpha_n = \frac{a_n}{\Gamma(pn+1)}\right]$;

5° Une série d'ordre positif est toujours divergente.

On voit que l'ordre p mesure en quelque façon le degré de divergence de la série.

Je m'occuperai surtout des séries d'ordre positif. Une pareille série divergente sera dite *sommable dans un angle α issu de l'origine* si le procédé régulier de sommation indiqué au n° 57 lui fait correspondre une fonction holomorphe à l'intérieur de l'angle α dont le sommet est en O et dont l'ouverture peut varier de o à 2π.

Je me propose de démontrer deux théorèmes :

1° *Les séries divergentes sommables sont maniables dans le calcul comme des séries convergentes;*

2° *Il suffit qu'une série divergente sommable vérifie formellement une équation différentielle algébrique pour définir une intégrale effective de cette équation.*

Quelques remarques nous conduiront au but.

Soit d'abord

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} \sum_0^\infty \frac{\alpha_n z^n x^n}{\Gamma(pn+1)}\,dx.$$

Si tous les α_n sont nuls, $f(z)$ est identiquement nul. Réciproquement, si $f(z)$ est une fonction d'espèce (A) et si toutes ses dérivées $f^{(q)}(z)$ tendent vers zéro quand z tend vers zéro en restant dans l'angle d'holomorphisme, $f(z)$ est identiquement nul, ainsi que tous les α_n. *Donc une série sommable d'ordre p ne peut représenter zéro sans être identiquement nulle et, par suite, deux séries d'ordre p sommables dans le même angle ne peuvent représenter la même fonction que si elles sont identiques.*

Il est clair aussi qu'*une combinaison linéaire quelconque à coefficients constants de séries d'un même ordre p sommables dans un même angle est encore une série sommable d'ordre p.* La somme de la série finale s'exprime à l'aide des sommes partielles, comme le coefficient général de la série finale à l'aide des coefficients de même rang des séries combinées. La même proposition s'étend d'ailleurs à une combinaison linéaire de séries sommables d'ordres différents, pourvu

que l'on puisse regarder celles-ci comme de même ordre (en introduisant au besoin sous le signe $\int$ des fonctions entières), sans que la sommabilité cesse de subsister pour les séries en question dans un même angle α : l'ordre final est alors l'ordre maximum des séries combinées.

Cela posé, j'appelle *transformation de M. Hadamard* la transformation qui fait correspondre la série $\sum_0^\infty \alpha_n \beta_n z^n$ aux séries $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ et $\sum_0^\infty \beta_n z^n$. *Si les séries composantes sont sommables dans un même angle et respectivement d'ordres p et q, la transformation de M. Hadamard donnera naissance à une série résultante qui sera encore sommable et d'ordre $p+q$.* Cela résulte de ce que

$$\Gamma(pn+1)\Gamma(qn+1)a_n b_n$$
$$= \Gamma(pn+qn+1)\,B(pn+1, qn+1)(p+q)(n+1)a_n b_n$$

et de ce que, d'après le théorème de M. Hadamard, la série

$$\sum_0^\infty B(pn+1, qn+1)(p+q)(n+1)a_n b_n z^n$$

est prolongeable si les séries $\sum_0^\infty a_n z^n$ et $\sum_0^\infty b_n z^n$ le sont elles-mêmes, comme cela a lieu par hypothèse [1].

On étendrait facilement ce théorème comme au Chapitre V.

Nous pouvons toujours supposer que la région de sommabilité de la série $\sum \alpha_n z^n$ contient les points correspondant à des valeurs réelles et positives de z. Il suffit, pour obtenir ce résultat, de faire au besoin d'abord une substitution $(z, e^{i\omega}z)$, ω étant convenablement choisi. On peut alors écrire, après un changement de variable évident,

$$f(z) = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}-1} F(u)\frac{du}{z},$$

---

[1] Il faut se rappeler qu'on a

$$B(pn+1, qn+1) = \int_0^1 x^{pn}(1-x)^{qn}\,dx,$$

en sorte qu'on peut appliquer les méthodes du Chapitre IV à l'étude de la série

$$\sum_0^\infty B(pn+1, qn+1)z^n.$$

avec

$$F(u) = \sum_0 \frac{\alpha_n u^n}{\Gamma(pn+1)}.$$

Cette formule, immédiatement établie pour z réel et positif, s'étend d'ailleurs sans difficulté au cas général.

De là peut se déduire, en suivant une marche tout à fait semblable à celle que M. Borel indique pour le cas de $p = 1$, le théorème suivant :

Étant données deux séries d'ordre p sommables dans le même angle, leur produit effectué comme si elles étaient convergentes est encore une série sommable du même ordre, dont la valeur est égale au produit des valeurs des deux séries facteurs.

Un cas particulier intéressant est celui où l'une des deux séries données se réduit à un polynome entier en z : l'ordre ne varie pas par le fait de la multiplication, la sommabilité subsiste, la somme est multipliée par le polynome envisagé.

En effet, posons

$$z = x^p, \qquad u = v^p;$$

il vient

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{v}{x}} F(v^p) \frac{dv}{x^p}.$$

Le raisonnement de M. Borel, relatif au cas de $p = 1$, peut alors être refait ici sans modification notable ([1]).

Je me bornerai à développer tout au long comme exemple la démonstration du théorème suivant :

Étant donnée une série sommable d'ordre p, la série dérivée est encore sommable et du même ordre et sa somme est la dérivée de la somme de la série primitive.

On a, en effet,

$$f'(z) = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} \int_0^\infty F(v^p) e^{-\frac{v}{x}} \left(\frac{v}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dv$$

ou bien

$$f'(z) = \frac{1}{p} z^{\frac{1}{p}-1} \left[-\int_0^\infty F(v^p) \frac{v}{x} d\left(e^{-\frac{v}{x}}\right) - \int_0^\infty F(v^p) e^{-\frac{v}{x}} \frac{dv}{x^2} \right].$$

Une intégration par parties donne

$$f'(z) = z^{\frac{1}{p}-1} \int_0^\infty v^p F'(v^p) e^{-\frac{v}{x}} \frac{dv}{x}.$$

([1]) Cf. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 92-94 (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1899).

c'est-à-dire

$$z f'(z) = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{u}{z}\right)^{\frac{1}{p}-1} u F'(u) \frac{du}{z}.$$

Or $uF'(u)$ correspond à $zf'(z)$ comme $F(u)$ à $f(z)$. D'où la conclusion annoncée.

De toutes ces propositions réunies, on tire immédiatement le théorème suivant :

Si l'on a un polynome entier par rapport à une variable z, à une série sommable $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ et à ses dérivées jusqu'à un certain ordre, ce polynome est lui-même une série sommable qu'on peut former en effectuant tous les calculs comme si les séries maniées étaient convergentes.

La somme de la série finale est d'ailleurs composée avec la somme de la série donnée comme le polynome lui-même l'est avec celle-ci. *Si donc la série finale est identiquement nulle, c'est-à-dire si la série donnée vérifie formellement l'équation différentielle obtenue en égalant le polynome à zéro, c'est que la somme de la série donnée est effectivement une intégrale de cette équation.*

Ces dernières propositions montrent bien que l'attribution de la somme $f(z)$ à la série divergente $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$, par le procédé du n° 57, correspond en fait à une réalité. La série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *représente,* sans ambiguïté, la fonction $f(z)$ qui lui est attachée. Le choix de la fonction $f(z)$ pour être associée à la série $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ n'a rien d'arbitraire, mais, au contraire, il s'impose impérieusement.

Ces résultats divers ne sont pas très nouveaux. M. Borel en avait déjà exposé le principal. Mais il s'était borné au cas de $p = 1$. Je devais reprendre la question rapidement pour en généraliser la solution.

Je vais maintenant établir des *caractères de sommabilité* qui permettent de manier pratiquement les séries divergentes. Auparavant, je citerai quelques exemples relatifs à des séries classiques.

59. Soit la série

$$\sum_0^\infty n!\, z^n;$$

on a

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - zx}\, dx.$$

C'est une fonction holomorphe dans tout le plan, à l'exception des points o et ∞. La partie positive de l'axe réel est en apparence une coupure : cela tient à ce que $f(z)$ n'est pas uniforme. Ses diverses branches se déduisent de la branche principale par addition du terme

$$2k\pi i\,\frac{1}{z}\,e^{-\frac{1}{z}},$$

on voit que, pour ce terme additif, $z = 0$ est un point singulier essentiel; pour la branche principale, au contraire, $z = 0$ est un point singulier de l'espèce (A), c'est-à-dire que $f(z)$ et ses dérivées y restent finies, sauf peut-être si z tend vers zéro par un chemin qui rencontre l'axe réel du côté positif.

On connaît le rôle que joue $f(z)$ dans la théorie de logarithme intégral

$$\mathrm{Li}(z) = \frac{1}{z}\,e^{-z} f\left(-\frac{1}{z}\right),$$

On sait aussi que $\frac{1}{z} f\left(\frac{1}{z}\right)$ est la valeur de la fraction continue de Laguerre.

60. Un des usages auxquels on peut employer la série (1) consiste à trouver une fonction génératrice des quantités α_n. Ici, il n'y a pas de discussion spéciale à faire, tous les procédés de sommation sont également bons.

Cherchons, par exemple, une fonction génératrice des nombres de Bernoulli B_n, sous la forme

$$\sum_1^\infty B_n z^{2n};$$

on a

$$B_n = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{e^x - 1}\,dx.$$

On peut donc poser

$$f_1(z) = \sum_1^\infty B_n z^{2n} = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sum_1^\infty 2n \left(\frac{zx}{2\pi}\right)^{2n-1}}{e^x - 1}\,dx,$$

c'est-à-dire

$$f_1(z) = 16\pi^2 z^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\,\frac{dx}{(4\pi^2 - z^2 x^2)^2}.$$

D'autre part, si l'on suit le procédé régulier de sommation, on doit faire $p = 1$, et l'on trouve

$$F(z) = \sum_1^\infty \frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}\,z^{2n},$$

$\zeta(s)$ désignant la fonction de Riemann

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{p^s} + \ldots + \frac{1}{p^{s}} + \ldots;$$

d'où

$$F(z) = 2z^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{(\pi^2 p^2 - z^2)^2}.$$

Par suite, on peut poser

$$f_2(z) = 2z^2 \int_{x=0}^{x=\infty} e^{-x} \sum_1^{\infty} \frac{x^2}{(\pi^2 p^2 - z^2 x^2)^2} dx.$$

En écrivant le second membre sous forme d'une série d'intégrales, et en changeant x en px dans le terme général de cette série, il vient

$$f_2(z) = 2z^2 \int_{x=0}^{x=\infty} \sum_1^{\infty} pe^{-px} \frac{x^2}{(\pi^2 - z^2 x^2)^2} dx.$$

En intégrant par parties, on constate que

$$f_1(z) = f_2(z).$$

Donc les deux procédés de sommation conduisent ici au même résultat : *c'est là un fait très fréquent.*

Remarquons que, pour calculer $f_2(z)$ régulièrement, nous aurions dû poser $z^2 = z'$ afin de rendre la série complète. Il aurait fallu prendre alors $p = 2$. Mais on aurait retrouvé le même résultat, à condition de faire le changement de variable $x^2 = x'$. *C'est là un fait général,* comme on le voit sans peine.

La fonction $f(z)$ trouvée est d'ailleurs bien une fonction génératrice des B_n, puisque c'est une fonction (A) [1]. Nous avions déjà fait un raisonnement semblable à propos de la fonction génératrice des polynomes $P_n(x)$ étudiés plus haut.

61. Soit maintenant la série de Stirling

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}}.$$

Le procédé de sommation qui nous a donné tout à l'heure $f_4(z)$ fournit ici, comme fonction attachée à la série de Stirling, l'intégrale

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{e^x - 1} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{2\pi z} dx;$$

[1] *Cf.* n° 50.

on en déduit, en intégrant par parties,

$$f(z) = 2z \int_0^\infty \mathrm{L}\frac{1}{1-e^{-x}} \frac{dx}{4\pi^2 z^2 + x^2};$$

or

$$\mathrm{L}\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^{-px}}{p};$$

d'où

$$f(z) = 2z \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty \frac{dx}{4\pi^2 p^2 z^2 + x^2},$$

après une transformation très simple. Toutes ces formes équivalentes de $f(z)$ correspondent à des procédés de sommation différents que l'on définirait aisément.

D'autre part, le procédé de sommation régulier donne ici

$$f(z) = 2z \int_0^\infty e^{-x} \sum_{p=1}^{p=\infty} \left[\frac{x}{2\pi p z} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{2\pi p z} - \frac{1}{2} \mathrm{L}\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2 p^2 z^2}\right) \right] dx.$$

En intégrant par parties, il vient

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} \sum_1^\infty \frac{1}{p} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{2\pi p z} dx.$$

C'est la même chose que

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_1^\infty e^{-px} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{2\pi z} dx,$$

comme on le voit en changeant x en px dans chaque terme de la série obtenue. Mais

$$\sum_1^\infty e^{-px} = \frac{1}{e^x - 1};$$

d'où

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{2\pi z} dx.$$

On retrouve bien la même fonction $f(z)$.

Les diverses expressions que nos procédés de sommation fournissent pour la fonction $f(z)$, attachée à la série de Stirling, montrent que l'on a

$$f(z) = \mathrm{L}\Gamma(z) - \left(z - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}z - z + \mathrm{L}\sqrt{2\pi}.$$

comme il le fallait. (*Voir*, par exemple, le *Cours lithographié* de M. Hermite, XIVe Leçon.)

Dans les deux derniers exemples de séries sommables, la coupure est l'axe imaginaire tout entier. La région de sommabilité est donc constituée par une moitié du plan (z). Les intégrales obtenues sont d'ailleurs les unes paires, les autres impaires, par rapport à z.

62. Considérons encore les *intégrales de Fresnel*, que l'on rencontre en Optique dans la théorie de la diffraction

$$I = \int_0^z \cos\frac{\pi}{2} v^2\, dv,$$

$$J = \int_0^z \sin\frac{\pi}{2} v^2\, dv.$$

Cauchy a montré que l'on pouvait poser

$$(1)\qquad \begin{cases} I = \dfrac{1}{2} + M \sin\dfrac{\pi}{2} z^2 - N \cos\dfrac{\pi}{2} z^2, \\[2ex] J = \dfrac{1}{2} - M \cos\dfrac{\pi}{2} z^2 + N \sin\dfrac{\pi}{2} z^2, \end{cases}$$

M et N étant certaines fonctions de z. Ces fonctions, si l'on essaye de les ordonner par rapport aux puissances de $\frac{1}{z}$, donnent les développements divergents suivants :

$$M = \sum_0^\infty (-1)^n . 1.3.5\ldots(4n-1) \frac{1}{\pi^{2n+1} z^{4n+1}},$$

$$N = \sum_0^\infty (-1)^n . 1.3.5\ldots(4n-1) \frac{1}{\pi^{2n+2} z^{4n+3}},$$

qu'on désigne sous le nom de *séries de Cauchy*. Or si l'on tient compte de la formule

$$\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p}\, dx,$$

on trouve, en faisant successivement $p = 2n$ dans la relation précédente et dans celle que l'on en déduit en changeant p en $p+1$, que les séries de Cauchy sont très facilement sommables

$$M = \frac{2\pi z^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{dx}{\pi^2 z^4 + 4x^4},$$

$$N = \frac{4z}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{dx}{\pi^2 z^4 + 4x^4}.$$

Les deux fonctions ainsi associées aux séries de Cauchy sont holomorphes, mais admettent comme coupures (apparentes) les bissectrices du système des axes du plan (z).

Je ne m'arrêterai pas à vérifier que le procédé régulier de sommation donne ici le même résultat. Mais, en supposant z réel, je vais faire voir que les fonctions que nous venons de déterminer permettent de calculer effectivement les intégrales de Fresnel.

Dérivons les formules (1) par rapport à z. On a

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}z^2 = M'\sin\frac{\pi}{2}z^2 - N'\cos\frac{\pi}{2}z^2 + \pi z\left(M\cos\frac{\pi}{2}z^2 + N\sin\frac{\pi}{2}z^2\right), \\ \sin\frac{\pi}{2}z^2 = -M'\cos\frac{\pi}{2}z^2 - N'\sin\frac{\pi}{2}z^2 + \pi z\left(M\sin\frac{\pi}{2}z^2 - N\cos\frac{\pi}{2}z^2\right). \end{cases}$$

Il suffit de vérifier ces formules (2), ou, ce qui revient au même, les formules

$$(3)\quad \begin{aligned} \pi z N + M' &= 0, \\ \pi z M - N' &= 1, \end{aligned}$$

qui n'en sont qu'une combinaison linéaire.

Or, posons

$$\sqrt{2}x = \sqrt{\pi}zt$$

dans les intégrales M et N. Il vient

$$M = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi z^2 t^2}{2}}\frac{dt}{1+t^2},$$

$$N = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{\pi z^2 t^2}{2}}\frac{t^2\,dt}{1+t^2}.$$

La vérification est alors immédiate.

63. Prenons, pour terminer, un exemple plus général, où nous aurons à nous servir de nos méthodes de prolongement.

Soit

$$x_n = \Gamma(pn+1)a_n,$$

avec

$$a_n = b_n\int_0^1 \varphi(y)y^n\,dy,$$

la quantité $|\Delta^{(n)}b_0|^{\frac{1}{n}}$ tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$. La série associée

à $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ est

$$F(zx) = \sum_0^\infty a_n z^n x^n = \int_0^1 \varphi(y)\, G\left(\frac{1}{1 - zxy}\right) dy,$$

G désignant une fonction entière. Si z n'est pas réel et positif, x variant de o à $+\infty$, cette fonction est holomorphe; d'ailleurs, quand zx devient infini, ce ne peut être qu'avec un argument non nul et alors la fonction associée reste finie. On a donc

$$f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx.$$

La série étudiée est sommable : sa somme est une fonction holomorphe pour toute valeur de z, sauf peut-être pour z réel et positif.

Des conclusions semblables subsistent évidemment si F, au lieu d'être de la forme indiquée, est d'une façon générale étudiable par nos procédés de prolongement. *Nous avons ainsi des cas très étendus où l'on peut faire correspondre une fonction bien définie à une série entière dont le rayon de convergence est nul.* Cela résulte, comme on le constate aisément, de ce fait que les diverses séries dont nous avons appris, dans les Chapitres précédents, à effectuer le prolongement restent finies ou au plus comparables à une puissance de z pour les valeurs de z dont le module est très grand et l'argument différent de certaines valeurs critiques.

Conclusion finale. — *Une série de Taylor dont le cercle de convergence est évanouissant définit, sous de très larges conditions relatives à la nature analytique pour n infini de son coefficient général α_n, une fonction holomorphe à l'intérieur d'un ou plusieurs angles issus de* O, *et cela par l'emploi d'un procédé régulier de sommation qui fait correspondre à une série donnée une fonction bien déterminée et unique.*

Je n'insisterai pas sur les conditions précises trouvées plus haut pour que a_n soit de l'une des formes visées ici.

64. Je dis, pour terminer, que nos séries sommables appartiennent à la catégorie des *séries asymptotiques* étudiées déjà par M. Poincaré.

Soit, en effet, une série divergente

$$\varphi = \sum_0^\infty \alpha_n z^n = \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}-1} F(zx)\, dx,$$

avec

$$F(t) = \int_0^1 \psi(y) \frac{dy}{1 - ty}.$$

Posons

$$\varphi_n = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n;$$

il vient

$$\frac{\varphi - \varphi_n}{z^n} = \frac{z}{p} \int_0^\infty e^{-x^{\frac{1}{p}}} x^{\frac{1}{p}+n} F_1(zx)\, dx,$$

en écrivant

$$F(t) - F_n(t) = t^{n+1} \int_0^1 \psi(y) \frac{y^{n+1}}{1 - ty} dy = t^{n+1} F_1(t).$$

Pourvu que z ne soit pas réel et positif, on voit que $|F_1(zx)|$ reste inférieur à un nombre fixe assignable, quand x varie de o à $+\infty$. *Donc le rapport* $\frac{\varphi - \varphi_n}{z^n}$ *tend uniformément vers zéro en même temps que* z. C'est la définition même donnée par M. Poincaré des séries asymptotiques.

La même conclusion subsiste évidemment quel que soit le procédé de sommation adopté.

Les règles de calcul des séries asymptotiques démontrées par M. Poincaré au Chapitre I du Tome II des *Méthodes nouvelles en Mécanique céleste* sont donc toutes applicables à nos séries sommables.

En particulier, revenons à l'exemple cité plus haut. Supposons que z ait une valeur réelle et négative. Supposons, en outre, que la fonction $\psi(y)$ soit positive dans l'intervalle (o, 1), en sorte que tous les coefficients a_n soient positifs.

On vérifie aisément alors que

$$|F_1(zx)| < a_{n+1};$$

d'où

$$\left| \frac{\varphi - \varphi_n}{z^{n+1}} \right| < \alpha_{n+1}.$$

L'inégalité

$$|\varphi - \varphi_n| < \alpha_{n+1} |z|^{n+1}$$

montre que, si l'on s'arrête à un certain terme de la série divergente donnée pour l'évaluation rapprochée de φ, on commet une erreur moindre que la valeur absolue du premier terme négligé. Si les termes commencent par décroître pour croître ensuite, il y a intérêt à s'arrêter immédiatement avant le plus petit terme; l'erreur est alors minimum et, d'ailleurs, d'autant plus petite que $|z|$ est lui-même plus petit. Cette circonstance avait déjà été signalée par Cauchy à propos de la série de Stirling; on voit qu'elle est très générale. C'est sur une remarque de ce genre que l'on peut baser un emploi légitime des séries divergentes dans le Calcul numérique, notamment en Astronomie ou en Physique.

J'ajoute que les conclusions de ce paragraphe subsistent *mutatis mutandis* si $F(t)$, au lieu d'être de la forme prise ici comme exemple, est de l'une quelconque des autres formes étudiées au Chapitre IV.

65. Finissons par une dernière remarque, que je me contenterai encore d'établir sur un exemple.

Soit

$$\alpha_n = n! \int_0^1 \varphi(y) y^n \, dy;$$

on a

$$F(t) = \int_0^1 \varphi(y) \frac{dy}{1 - ty};$$

et

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-x} F(zx) \, dx;$$

d'où

$$f(z) = \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x} \varphi(y) \frac{dx \, dy}{1 - zxy}.$$

Mais, d'autre part, en employant le procédé de sommation de Stieltjes, on trouve

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{G(x)}{1 - zx} \, dx,$$

avec

$$G(x) = \int_0^1 \frac{1}{y} \varphi(y) e^{-\frac{x}{y}} \, dy.$$

On voit que *le procédé de sommation de Stieltjes et celui de M. Borel conduisent ici au même résultat.* C'est là un fait qu'il serait aisé de prouver en général.

IX. — Conclusion.

66. Il est bon de résumer en quelques mots les principaux résultats acquis dans le présent Travail et de rappeler, avant de finir, le but que nous nous proposions d'atteindre.

J'ai développé, dans ce Mémoire, une méthode qui permet, pour des cas étendus, l'étude complète d'une fonction définie par une série de Taylor ou par d'autres séries analogues. J'arrive ainsi, grâce à l'emploi de certaines intégrales définies, d'une part à effectuer pratiquement le prolongement analytique d'un développement taylorien qui admet un cercle de convergence fini et, d'autre part, à donner un sens à certaines séries entières toujours divergentes.

L'idée qui m'a dirigé dans ces recherches est la suivante : *une intégrale dé-*

finie est une expression beaucoup plus simple qu'une série, du moins en ce qui concerne la représentation de certaines fonctions usuelles, du type de celles qu'on rencontre le plus fréquemment dans les applications.

Plusieurs des résultats que j'ai obtenus ont été publiés déjà par MM. Borel et Leau dans des Mémoires qui n'avaient pas encore paru au moment où mes recherches étaient terminées. Mais, en ce qui concerne l'étude des fonctions données par leur développement taylorien, la méthode que je propose me semble fournir plus de renseignements que celle dont M. Leau s'est servi. En outre, elle se prête à une foule d'autres applications, concernant en particulier la théorie des séries divergentes. Sur ce dernier point, j'ai cherché surtout à compléter les travaux récents en découvrant des cas précis et suffisamment généraux, où l'on puisse utiliser, dans la pratique, certaines méthodes de sommation dues à Stieltjes et à M. Borel.

J'ai été conduit à distinguer certains ensembles dénombrables de coefficients α_n jouissant de la double propriété suivante :

1° α_n est une fonction analytique de $n = \rho e^{i\omega}$ holomorphe pour $\rho > \rho_0$ et $|\omega| < \omega_0$, ρ_0 et ω_0 désignant deux constantes positives.

2° $\dfrac{L|\alpha_n|}{\rho}$ tend vers zéro avec $\dfrac{1}{\rho}$, quel que soit ω, pourvu que l'on ait $|\omega| < \omega_0$.

Pour me borner ici au cas le plus simple, je supposerai

$$\alpha_n = G(n) \int_0^1 \varphi(x) x^n \, dx,$$

$G(n)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à 1. On peut alors énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *La fonction* $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ *est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être pour z réel et supérieur à 1 : elle est d'ailleurs représentable dans tout le plan par une certaine intégrale définie qui fournit, à partir de la série donnée, les éléments d'une étude complète de la fonction envisagée.*

Théorème II. — *La fonction entière* $\sum_0^\infty \dfrac{\alpha_n}{\Gamma(pn+1)} z^n$ *(p entier et positif) peut être mise, elle aussi, sous la forme d'une intégrale définie qui permet généralement d'en calculer la valeur asymptotique.*

Théorème III. — *Une série trigonométrique telle que* $\sum_0^\infty \alpha_n \cos nz$ *est convergente ou sommable. Sa somme est une fonction analytique dont on peut obtenir les dérivées successives par dérivation terme à terme. On peut d'ail-*

leurs faire l'étude de cette fonction dans tout le plan, en l'exprimant encore par une intégrale définie; et ces conclusions s'étendent à d'autres séries procédant suivant des fonctions $\varphi_n(z)$ dont on connaît la fonction génératrice.

Théorème IV. — *Le problème des moments peut être résolu sans ambiguïté pour des nombres donnés de la forme $n!\,\alpha_n$ ou $(n!)^2\alpha_n$.*

Théorème V. — *Les séries divergentes du type $\sum_0^\infty \Gamma(pn+1)\alpha_n z^n$ sont asymptotiques et sommables.*

Ces résultats ont été généralisés de bien des façons; par exemple :

1° Si $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ est développable pour les grandes valeurs de n suivant les puissances de $\frac{1}{n}$;

2° Si $\alpha_n = G(a_n)$, a_n étant du type

$$a_n = (n+1)^q \int_0^1 \varphi(x) x^n\, dx,$$

et G désignant une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{q}$;

3° Si

$$\alpha_n = \sum_0 a_{p,n}\xi_p^n,$$

les ξ_p désignant des nombres donnés et les $a_{p,n}$ des quantités présentant, quel que soit p, par rapport à n, les caractères indiqués plus haut.

Il est sans doute inutile de faire remarquer combien il resterait de travaux à poursuivre dans les diverses voies que j'ai abordées. J'ai voulu surtout indiquer un *principe de recherche* et montrer, par quelques exemples, avec la connexité de certains problèmes, l'intérêt qu'il y aurait à développer le *calcul inverse des intégrales définies*. Mais bien des questions demeurent en suspens, qui feront l'objet d'autres Mémoires.

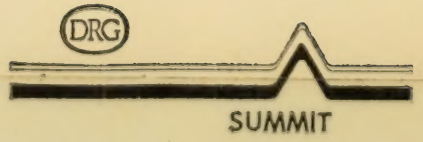
Je termine en énonçant la possibilité d'étendre la plupart des conclusions et des méthodes que je viens d'exposer au cas des séries multiples et des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

(Extrait des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e S., II.)

26

Le Roy
Sur les series
divergentes et les
fonctions definies par un
developpment de Taylor

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY



8993